— GIANFRANCESCO MALFATTI —

" TRATTATO INEDITO
delle sezioni coniche
e dei luoghi geometrici — "

già in possesso di Mons. Francesco
de' Pizzini

Isabelo J. Canto

6185
II 56

I

BIBLIOTECA CITTADINA ALA

CAP. I

Esposta la natura delle Sezzioni Coniche, si dichiarano alcune proprietà degli assi, dei fochi, e delle direttrici, ed insieme si producono tre stromenti atti a descrivere le curve.

Pappo d'Alessandria, Geometra insigne, nell'ultima proposizione del libro 7 dimostra una elegante e bella proprietà di quelle curve la cui natura riconobbero gli antichi Geometri dalla Sezzione del Cono, onde è, che son chiamate Sezzioni Coniche. A me è parrito, che non si possa far cosa più elegante di quello che sia il servirsi come di fondamento di quella proprietà da Pappo dimostrata: poiché da questa si fa chiara e facile la generazione di queste curve, e le altre loro principali proprietà con uno spedito metodo si deducono. Laonde per non perder tempo io comprendo il Teorema di Pappo con questa definizione.

BIBLIOTECA CITTADINA ALA

Definizione Iª

Sopra una data linea DaD si conduca primieramente una normale FA, la quale si divida a piacere in V: dipoi con qualunque DE, che sia normale alla retta DaD concorra la linea FE in maniera, che sia DE : EF :: AV : VF. La Curva, che passerà per tutti i punti E similmente determinati chiamisi Sezzion Conica, la retta indefinita AD chiamisi la direttrice, il punto F il foco, il punto Fig. 1ª. 2ª. 3ª.

V, poichè ancor questo appartiene alla curva, chiamisi il vertice della sezzione.

Corollario pmo. Da questa generazione chiaramente si vede, che la sezzion Conica hà due rami VE, V2E situati dall'una e dall'altra parte della perpendicolare FA, l'uno de' quali se all'altro si sovraponga, a quello perfettamente s'adatta. Imperoche dal punto E si conduca E2O normale ad AF prodotta, se fa d'uopo, la quale si produca fino che 2O2E = E2O: indi congiungasi 2EF; finalmente si conduca 2E2K paralella alla retta FA. E' facile a dimostrarsi, che F2E = FE, e DE = 2D2E. Dunque AV: VF :: 2D2E : 2EF: dunque il punto 2E è nella curva. Siche potendosi similmente di tutti i punti dimostrare, si rende evidente, avere la curva due rami simili ed eguali.

Corol. 2°. La linea E2E, che taglia perpendicolarmente AF, benchè si produca in infinito, non hà altro punto commune colla curva trattine i due E, 2E. La quale proprietà, poichè una contraria supposizione non può condurre in assurdo, io lascio, che la dimostri l'industria de' Leggitori

Corol. 3°. Le rette linee E2E, paralelle alla direttrice, che toccano l'uno e l'altro ramo della curva, sono tagliate per metà dalla linea AF, se v'è il bisogno, prodotta. Periloche AF2O chiamasi il primo asse della Sezion conica.

Definizioni, e Determinazioni.

Se AV è maggiore di VF, la sezione chiamisi un' Elissi. Che se AV è infinitamente maggiore di VF, ovvero, se la direttrice AE sia infinitamente distante dal vertice V, ne vien' egli che le rette AV, DE, le quali non hanno il divario, che è una quantità, la quale ad esse hà una ragione minore di qualunque data, siano trà loro eguali. Dunque le linee FV, FE, proporzionali alle prime saranno eguali. Perciò il circolo è una certa specie d'Elissi, la cui direttrice infinitamente è lontana dal vertice; ed il cui foco è lo stesso che il centro del cerchio. Fig. 1.a

- Se la abscissa AV è eguale al VF. la Sezzione si chiami una parabola. Fig. 2.a

Se è AV minore di VF, la Sezzione si denomini un' Iperbola. All' Iperbola appartiene il caso, quando VF è infinitamente maggiore di VA. Nella qual supposizione FV, FE, la differenza delle quali hà ad esse una minore ragione di qualunque data, bisogna che siano eguali: Dunque le loro proporzionali AV, DE parimente sono eguali; la quale proprietà è della linea retta equidistante dalla direttrice. Fig. 3.a

Definizione della Tangente

Quella linea dicesi toccare la curva, la quale talmente cade nella curva, che tutta è fuor della curva, cioè che tutta è dalla parte convessa della curva. Perchè si faccia più chiara la teoria delle tangenti, tornerà in acconcio concepire la curva Fig. 4.a

in tal maniera. Si figuri che la linea K2K, che taglia la curva ne' due punti E, 2E, si mova talmente, che la corda E2E vada sempre più diminuendosi. Quando avviene che la corda E2E sia nulla la secante si cambierà in tangente: poichè giacerà tutta fuor della curva, e sarà posta nella sua parte convessa. Benchè qualunque moto a talento si possa dare alla secante K2K; pure nelle Sezzioni Coniche supporremo, che ella proceda sempre parallela a se stessa. In ogni caso però valerà questo, che io giudico doversi premettere.

Lemma

Se la retta AF, che taglia la curva nel punto V, divida per mezzo tutte le corde parallele alla corda E2E, e per il punto V si conduca Q2Q parallela a questa istessa corda, dico, che da questa vien toccata la curva nel punto V. Fig. 4.ª

Dimostro. Figurisi, che la retta K2K, la quale taglia la curva ne' punti E, 2E cammini parallela a se stessa, fino che sarà arrivata nel luogo Q2Q; nel qual luogo talmente concorre colla curva, che tutta è fuor della curva, e toltone V non ha altro punto con essa commune. Perchè se fosse altrimente, la linea AV non taglierebbe per mezzo la corda parallela ad E2E: il che è contrario all'Ipotesi. Dunque è necessario, che Q2Q tocchi la curva nel punto V. C. D. D.

Proposizione I

Quella linea, che per il vertice della Sezione V si conduce parallela alla direttrice, tocca nello stesso punto la curva.

Dim.° Poiché il primo asse AF, che taglia la curva nel vertice V, divide per metà tutte le corde parallele alla direttrice, quella linea, che si conduce parallela alla stessa direttrice per il punto V, cioè Q.° E, per il Lemma premesso tocca la Sezion Conica nel punto V. C.D.D. Fig.ª 1.ª 2.ª 3.ª

Proposiz. II

Data una Sezione Conica, ed il primo asse, che la taglia nel vertice V, trovar l'altro punto u, dove l'asse cade nuovamente nella Sezione. Fig.ª 1.ª 2.ª

Sia la direttrice della data Sezione la retta DrD, il vertice V, il foco F. Chiamisi AV = a, VF = b, Vu = z. Dunque Au = a + z, ed Fu = z − b: sarà dunque per la prima proprietà della Sezione Conica:

AV : VF :: Au : uF   cioè analiticamente,

$a : b :: a+z : z-b$: Dunque dividendo

$a-b : b :: a+b : z-b$, ed alternando

$a-b : a+b :: b : z-b$, e componendo

$a-b : 2a :: b : z = \frac{2ab}{a-b}$.

Corol. 1.° S'è trovata

$Vu = \frac{2ab}{a-b}$: Dunque dividendo Vu egualmente in C,

$CV = \frac{ab}{a-b}$, e tolta FV = b. sarà

$CF = \frac{b^2}{a-b}$, ed aggiunta la $VA = a$ alla retta CV, sarà

$CA = \frac{a^2}{a-b}$. Onde essendo i termini

$\frac{b^2}{a-b}, \frac{ab}{a-b}, \frac{a^2}{a-b}$ in proporzione continua, ancora le linee, cui essi si agguagliano

CF, CV, CA saranno in proporzione continua. In seguito il punto C chiamerassi il centro della Sezione, la linea Vu, il primo asse, poichè questo vocabolo asse significa una qualche linea determinata.

Corol. 2.° La retta qaq, la quale è parallela alla direttrice, e passa per il punto u, nello stesso punto tocca la sezione.

Determinazioni

Nella Elisse, poichè è $a > b$, sarà sempre positiva $a-b$; perciò i punti C, u saranno sempre posti dopo i punti A, V, F. Nota, che nel circolo, il quale è un' Elissi, la cui direttrice è infinitamente distante da esso, la retta FC è la terza proporzionale dopo l'infinita CA, e la finita CV. Dunque sarà nulla. Perciò il foco F, ed il centro C nel circolo cadono nello stesso punto. Fig. 1.ª

Nella Parabola $a = b$, ed $a - b = 0$: Dunque tutte le linee, che s'esprimono col divisore $a-b$ sono infinite. Dunque i punti C, u sono in una infinita distanza dai punti A, V, F, cioè il primo asse non taglia più la Sezione. Fig. 2.ª

Nell' Iperbola $a < b$. Dunque $a - b$ è quantità negativa: per il che i punti C, u saranno posti dopo i punti F, U, A, onde è manifesto, che l'Iperbola ha un ramo ue posto dopo il ramo VE, e la direttrice AD. Fig. 3.ª

Prop. III

Se una linea DE parallela al primo asse taglia la Sezzione conica in E, trovar l'altro punto e, dove ella taglia nuovamente la Sezzione. Fig. 1.ª 2.ª 3.ª

Dai punti E, e si conducano EF, eF al foco, dal quale si conduca FP perpendicolare al primo asse, ed alle sue parallele. Chiamisi Ee $= z$, DE $= s$: nelle altre si ritengano le denominazioni della antecedente proposizione. PD $=$ AF $= a + b$. Dunque se P cade fuori della Sezzione, sarà PE $= s - a - b$. Ma se P cade dentro la Sezzione, sarà PE $= a + b - s$. eP pure $= z + s - a - b$. Imperocchè, se P cade fuori della Sezzione, devesi aggiungere EP alla retta Ee, e se cade ~~dentro~~ [fuori?] della Sezzione, dalla retta Ee devesi sottrarre la EP, perchè si abbia la eP. Ma per la proprietà della Sezzione conica è

AU : UF :: DE : EF $= \frac{bs}{a}$

$a : b :: s : \frac{bs}{a}$ Di più stà

AU : UF :: De : eF $= \frac{bs + bz}{a}$

$a : b :: s + z : \frac{bs + bz}{a}$.

Ma perchè l'angolo in P è retto

$EF^2 - PE^2 = eF^2 - Pe^2$; poichè ciascuna parte $=$ FP.

$$\frac{b^2s^2}{a^2} - s^2 + 2s\cdot\overline{a+b} - \overline{a+b}^2 = \frac{b^2s^2+2b^2sz+b^2z^2}{a^2} - z^2 - 2zs$$
$$\left\{ - s^2 + 2z\cdot\overline{a+b} + 2s\cdot\overline{a+b} - \overline{a+b}^2 \right.$$

e cancellati i termini, che si devono cancellare

$0 = \frac{2b^2sz + b^2z^2}{a^2} - z^2 - 2zs + 2z\cdot\overline{a+b}$. e dividendo per z, e trasportando i termini opportunamente.

$\frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot z = 2\cdot\overline{a+b} - 2s\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2}$. Dunque moltiplicando per $\frac{a^2}{a^2-b^2}$

$z = \frac{2a^2}{a-b} - 2s$. Il che dovea sapersi.

Corol. 1.° Poichè s'è trovata

$Ee = \frac{2a^2}{a-b} - 2s$, se Ee si divida per mezzo in O, sarà

$EO = \frac{a^2}{a-b} - s$ Dunque aggiunta la $DE = s$, sarà

$DO = \frac{a^2}{a-b}$; da cui se si tolga $DP = a+b$, sarà

$PO = \frac{b^2}{a-b}$.

Corol. 2.° Se Ee sia divisa per mezzo in O, sarà $OP = CF$, poichè l'una e l'altra s'esprime per $\frac{b^2}{a-b}$; ed $OD = CA$: mentre amendue agguagliano $\frac{a^2}{a-b}$. Che se queste linee sono eguali tra loro, Ee sarà divisa per metà in O: il che da chiunque lo voglia, può essere con facilità dimostrato.

Determinazioni

9

Intorno alla Parabola non v'è che dire, perchè in essa a−b = o. Dunque i punti O, e sono infinitamente lontani dai punti D, E. Fig. 2.ª

Nella Elissi a−b è quantità positiva. Dunque i punti O, e saranno dopo i punti D, E. Fig. 1.ª

Nella Iperbola a−b è quantità negativa: Dunque i punti O, e stanno dopo i punti E, D, e DE taglierà di nuovo la curva in quel ramo, che è posto dall'altra parte della direttrice. Fig. 3.ª

Prop. IV

Quella linea, che dal centro si tira parallela alla direttrice, taglia per mezzo tutte le corde parallele al primo asse. Fig. 1.ª 2.ª 3.ª

Dim.º Dal centro C, e dal foco F si tirino CO, FP parallele alla direttrice. Dunque CO divide tutte le corde Ee parallele al primo asse in maniera, che OD = CA, ed OP = CF. Dunque per il Corol. 2.º della superiore proposiz. Ee è divisa egualmente in O. C.D.D.

Corol. 1.º Poichè CO è parallela alla direttrice, dividerà Ee non solo in parti eguali, ma ancora ad angoli retti. Perciò si chiamerà l'asse secondo. Perciò l'asse primo divide per mezzo, ed a norma tutte le corde parallele all'asse secondo, e l'asse secondo taglia per metà e ad angoli retti tutte le corde parallele al primo.

Corol. 2.° Condotti i due assi, si determineranno quattro rami simili ed eguali. Imperciochè VE che si dimostrò simile ed eguale ad VrE, è chiaro, che è simile ed eguale ad ve, che sappiamo essere eguale e simile ad ure. Laonde i quattro rami VE, VrE, ue, ure simili sono ed eguali; dalle quali cose ne viene chiaramente, che qualunque corda, che passa per il centro, resta dal centro divisa per metà.

Determinazioni.

Non parliamo della Parabola, nella quale il secdo asse è a un' infinita distanza dal vertice. Fig. 2.ª

Nell' Elissi il secdo asse è posto dopo il vertice e il foco. Fig. 1.ª

Nella Iperbola giace dopo il foco e il vertice. Fig. 3.ª

Prop. V

Trovare i punti, dove il secondo asse taglia la sezzione Conica. Fig.ª 1.ª

Supponghasi, che lo tagli nei punti T, t. Da T conducasi TZ normale alla direttrice, e si congiunga TF [quello che dicesi del punto T, intendasi ancora del punto t. E' chiaro, che TZ = AC. Perciò ritenute le denominazioni della 2.ª proposizione, per la proprietà della Sezzione Conica sarà

AV : VF :: ZT : TF, oppure analiticamente

$a : b :: \frac{a^2}{a-b} : \frac{ab}{a-b}$. Ma anche VC = $\frac{ab}{a-b}$.

Dunque TF = VC. Perciò, se col centro F, nell' intervallo VC si descriva un circolo, i punti del concorso del circolo, e del secondo asse, saranno quegli istessi.

nei quali il 2.° asse taglia la Sezzione Conica.

Coros. 1.° Poichè $FC=\sqrt{\frac{ab^2-b^4}{a-b^2}}$, perchè è eguale à $\sqrt{AF^2-CF^2}$, riducendo la frazzione à minimi termini, sarà $FC=b\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$, la quale quantità sarà mezza proporzionale trà $a+b$, e $\frac{b^2}{a-b}$; cioè trà AF, ed FC. La retta FC in avvenire chiamerassi il secondo semiasse.

Coros. 2.° Pertanto se per li punti F, f si conducano gFQ, 2gfzQ, parallele al primo asse, queste toccheranno la Sezzione Conica nei punti F, f per il lemma avanti la Proposizione.

Determinazioni.

Nella Parabola tutto è a un'infinita distanza. Fig.ª 2.ª

Nell'Elissi v'à luogo tutto ciò, che è stato esposto nella Proposizione e nei suoi Corollarj. Fig.ª 1.ª

Nell'Iperbola non così. Poichè fatto centro in F nell'intervallo FC il circolo non può mai tagliare l'asse 2.° CO. Il che viene indicato ancora dal valore della retta FC, che nell'Iperbola è imaginario. Mà per una certa analogia coll'Elisse, l'ascissa FC, purchè sia mezza proporzionale trà AF, e CF, chiamasi ancora nell'Iperbola il semiasse transverso: poichè questa voce asse si usurpa per una linea determinata. Fig.ª 3.ª

Definizione.

Se un punto nella Sezzione riferito a qualche linea hà la stessa proprietà, che hà il foco riferito

riferito alla direttrice, quello si chiami il foco, quella la direttrice.

Prop. VI

Se si prende uf = VF, ua = VA, e si tira ad parallela alla retta AD, dico, che f è il foco, ad la direttrice. Fig.ª 1.ª 3.ª

Dim.º Si conduca qualunque Dd parallela al primo asse, che tagli la curva nei punti E, e, dai quali si conducano EF, ef, e dal centro C l'altro asse CO. Poichè tanto Dd, quanto Ee è divisa per metà dal 2.º asse in O, sarà DE = de: dunque edf2O = f2O. Mà E2O = e2O: Dunque EF = ef. Mà AV : VF :: DE : EF: Dunque ancora au : uf :: de : ef. imperciochè ogni termine di questa analogia è eguale ad ogni termine dell'analogia superiore: Dunque f è il foco, ad è la direttrice.

Determinazione

L' Elisse stà in mezzo alle due direttrici, ed i suoi vertici sono più distanti dal centro dei suoi fochi. Fig.ª 1.ª

Nell' Iperbola le direttrici sono poste trà i due rami della Sezzione, e dal centro sono più lontani i fuochi, che i vertici. Fig.ª 3.ª

Nella Parabola questa proposiz.ne non v'hà luogo: perchè l'altra direttrice, e l'altro foco, sono à una infinita distanza dal primo foco, e dalla prima direttrice. Fig.ª 2.ª

Prop. VII

Se da qualunque punto E della Sezzione si conducano ai due fuochi le rette EF, Ef, dico, che nell'Elis= Fig.ª 1.ª 3.ª

X 12 2 se la somma delle linee EF, Ef, nella Iperbola; la loro differenza è eguale alla retta Vu, cioè al primo asse.

Dim.° Quanto alla prima parte, per la proprietà della Sezione è

$AV : VF :: DE : EF$. Parimente $au : uf :: dE : Ef$.
Dunque, perchè $AV = au$, $VF = uf$, sarà
$DE : EF :: dE : Ef$: ed alternando
$DE : dE :: EF : Ef$: e componendo
$DE : dD :: EF : EF + Ef$, ed alternando
$DE : EF$, cioè $AV : VF :: Aa : EF + Ef$, la quale espressa analiticamente dà
$a : b :: \frac{2a^2}{a-b} : EF + Ef = \frac{2ab}{a-b}$. Si hà ancora
$Vu = \frac{2ab}{a-b}$: Dunque $EF + Ef = Vu$.

Dim.° quanto all'altra parte. Nella Iperbola si ricava collo stesso metodo la verità della proposizione.

Scholio. Sebbene nella Parabola per l'infinita distanza dell'altro foco questa propne non abbia alcun valore; pure condotta qualunque xy parallela alla direttrice, la quale primieramente sia posta in guisa, che il vertice della Sezione giaccia trà questa e la direttrice, la somma dei lati XE, EF, sarà costante, cioè $= XD = yA = VU + VF$. Fig.ª 2.ª

Che se la xy è condotta in maniera, che il vertice della Sezione sia posto trà questa e il foco

la differenza delle linee xE, EF sarà costante; cioè $= yA = yV - VF$.

Prop. VIII

Si espone il modo, con cui puossi descrivere l'Elisse.

Fig.ª 5.ª

Presa una cordicella, si fermino le sue estreme parti nei punti F, f, i quali saranno i fuochi dell'Elissè: indi movasi in giro lo stile E, che tiene disteso il funicolo egualmente in ogni luogo, fino che egli ritorna a quel punto, d'onde prima partissi. Lo stile descriverà una curva, la quale, perchè le rette EF, Ef insieme prese, sono sempre eguali a una costante, è troppo chiaro, essere un Elisse.

Prop. IX

Formare uno stromento atto a descrivere la Parabola.

Fig.ª 6.ª

Fermata la regola AD sopra un piano, e la norma KHG in guisa però, che il lato della norma HK possa scorrere liberamente sopra la regola AD, prendasi una cordicella FEG, di cui un'estremo leghisi in G, l'altro in F: la lunghezza della corda sia eguale alla retta GH. Dipòi facciasi, che sopra la regola si mova la norma, e con lo stile E, che sopra il lato GH tien disteso il funicolo, descrivasi la curva VEZ, la quale da ciò è chiaro, essere una Parabola, perchè GE, EF, sempre eguagliano la costante GH.

In tal modo descriverassi la metà della Parabola, mà se si volti la norma, e dall'altra parte si ponga del punto F, averàsi l'altra parte della curva.

13

Corol. L'infima linea della regola DA sarà la direttrice della Parabola, il punto F il fuoco.

Prop. X

Con quale stromento si possa descrivere l'iperbola per un continuo moto, questa propone dimostra. Fig.a 7.a

Adattisi in tal modo la regola fG nel punto f, che intorno a quello possa muoversi liberamente: indi lega una cordicella alla estremità G, l'un termine della quale fermisi nel punto F. Dipoi facciasi, che la regola Gf in giro si mova intorno al punto f, e con lo stile che egualmente tiene disteso il funicolo GEF, descrivasi la curva CE la quale sarà un'iperbola avente i fuochi nei punti F, f: poichè è sempre costante la differenza delle rette fE, FE.

Che se si adatta un'altra regola Fg eguale alla prima in guisa, che intorno il punto F possa voltarsi, e le estremità d'una corda fag si leghino nei punti f, g, la quale corda eguagli la prima e dipoi, come sopra, si proceda nell'operazione descriverassi il ramo dell'iperbola ael.

Finalmente voltato lo stromento, di leggieri si descriveranno gli altri rami.

Corol. 1.o Se il fune GEF è minore della regola Gf, descriverassi il ramo VE, che rivolge la sua parte concava verso il punto F: ma se il fune GEF è maggiore della regola Gf, descriverassi un ramo che volta il suo convesso al punto F, il concavo al punto f.

Corol. 2° Se il funicolo sarà eguale alla regola descriverasi una linea retta, ed i rami opposti della Iperbola coincideranno nella stessa linea.

Scolio. Abbiamo detto altrove, che l'Iperbola diventa una linea retta, quando VF è infinitamente maggiore di AD. Ma devesi riflettere seriamente a due Ipotesi, nè va confusa l'una coll'altra. Poichè primieramente FD può essere finita, VA infinitamente piccola, o nulla, nella quale Ipotesi, anche CA si fà nulla; dunque i punti D, A, C, a, u cadono in un sol punto, e gli opposti rami coincidono nella stessa retta linea, la quale è la medesima, che noi abbiamo descritto nell'antecedente corollario. Fig.^a 3.^a

Dipoi VA può essere finita, e F infinita, nella quale supposizione solamente CA, Ca diventano = 0. Dunque le direttrici, e l'altro asse coincidono nella stessa linea. Ma i rami dell'Iperbola, che si tramutano in linee rette non si confondono, ma distano dalla direttrice per le linee VA, ua; la qual cosa nella soluzione di alcuni problemi deve essere diligentemente considerata, come noi spiegheremo a suo luogo.

CAP. II

Dei Diametri delle Sezzioni del Cono.

Prop. I

Se dai punti E, V in qualunque angolo si inclinino alla Direttrice le parallelle EM, VL, dico, che sarà LV : VF :: EM : EF. Fig. 8. 9. 10.

Dim.° Dagli stessi punti si conducano ED, VA perpendicolari alla direttrice. I triangoli AVL, DEM sono simili. Dunque
VL : EM :: VA : ED : Ma per la natura della Sezzione
VA : ED :: VF : EF ; dunque per l'egu. delle ragioni
VL : EM :: VF : EF.

Corol. FB, che dal foco si tira parallella alla retta VL, viene divisa dalla curva nel punto W in maniera, che sarà
BW : WF :: LV : VF.

Determinazioni

Nella Parabola, nella quale AV = VF, sarà sempre VL > VF.

Questo maggiormente accaderà nell'Elisse, in cui AV > VF. Ma nella Iperbola la cosa è variabile: imperciochè descrivasi col centro V nell' intervallo VF un circolo, che taglierà la direttrice nel punto T: onde sarà VT = VF. Mà VL che taglia la direttrice trà i punti A, T è minore di VF; ed Vl, che la taglia dopo i punti A, T è maggiore di VF. Dunque &c. Le quali determinazioni allo stesso modo suc:

16

cederebbero, se giacessero le rette VZ, VT, VS dall'altra parte dell'asse. Dalla quale determinazione ancor questo ne viene. Se il seno tutto sarà al seno dell'angolo dell'inclinazione, come $VF : VA$, allora l'inclinata $VT = VF$. Col nome dell'angolo d'inclinazione intendo l'angolo fatto dalla direttrice e dall'inclinata, come VZA. Ma se il seno dell'angolo retto averà al seno dell'angolo d'inclinazione minore ragione di quello che abbia $FV : VA$, allora $VZ < VF$: se al contrario sarà in maggior ragione, sarà $VZ > VF$.

Prop. II

Se la linea BF passa per il foco F, e taglia la Sezzione in W, a trovar l'altro punto ω, dove essa di nuovo taglierà la Sezzione. Fig.^{a} 11, 12^{a}, 13^{a} 14^{a}, 15^{a}.

Chiamisi $BW = m$, $WF = n$, $W\omega = z$. Dunque $B\omega = m+z$, ed $\omega F = z-n$, ma per la propria antecedente deve stare

$BW : WF :: B\omega : \omega F$, oppure analiticamente

$m : n :: m+z : z-n$: Dunque dividendo

$m-n : n :: m+n : z-n$, e permutando

$m-n : m+n :: n : z-n$, e componendo

$m-n : 2m :: n : z = \frac{2mn}{m-n}$.

Corol. 1.° S'è trovata

$W\omega = \frac{2mn}{m-n}$: Dunque se questa dividesi per metà in K, sarà

$KW = \frac{mn}{m-n}$, e tolta $FW = n$, diverrà

$KF = \frac{n^2}{m-n}$, e aggiunta BW alla retta KW

17

$KB = \frac{m^2}{m-n}$, dai quai valori è manifesto, che le rette KB, KW, KF sono continuamente proporzionali, poichè i termini

$\frac{m^2}{m-n}, \frac{mn}{m-n}, \frac{n^2}{m-n}$, ai quali quelle si agguagliano sono in proporzione continua.

Corol. 2.º Se la linea FB coincidesse coll'asse della sezzione, allora $m=a$, $n=b$, e le stesse cose si dedurebbero, che sono state da noi spiegate nella propne 2.a del. 6. pro.

Determinazioni.

Nella Elissi, nella quale sempre $BW > WF$ la quantità $m-n$ è sempre positiva: dunque i punti K, w saranno posti dopo i punti B, W, F. Fig. 11.a

13

Lo stesso avviene nella Parabola, se si eccettui l'asse, il quale, com'è si è detto a suo luogo, producesi in infinito. Fig.a 12.a

La grande varietà è nell'Iperbola. Perciochè, se FB sia talmente inclinata nella direttrice, che il seno tutto al seno dell'angolo d'inclinazione sia in maggior proporzione di FV: VA, sarà $BW > WF$. Dunque $m-n$ è positiva: Dunque i punti K, w saranno posti dopo i punti B, W, F, siccome succede nelle altre sezzioni. Fig.a 13.a

Ma se FB sia inclinata alla direttrice in guisa, che il seno tutto al seno dell'angolo Fig.a 14.a

15

abbia la stessa ragione, che FV : VA, si fà VB = VF. Dunque m−n = 0. Dunque l'altro punto del concorso, anzi anche il punto, dai cui divisa viene la corda per metà è a una infinita distanza dal punto V, cioè BVF non concorrerà giammai nuovamente colla sezione il che abbiamo ancor veduto avvenire nell'asse della Parabola.

Finalmente se il seno tutto al seno dell'angolo d'inclinazione sarà in minor ragione di FV : VA, allora BV < VF. Dunque m−n è quantità negativa. Perciò i punti K, D e stavanno dopo i punti F, V, B, e la retta FV taglierà di nuovo la curva nel ramo, che giace dopo la direttrice. Questo caso ancora appartiene al primo asse. Fig.a 15.a

Propos. III

Se DE, che non passa per il foco, concorra colla sezione in E, a trovare l'altro punto e, dove egli taglia nuovamente la sezione. Fig.a 11.a, 12.a, 13.a 14.a, 15.a

Dal foco F tirisi FB parallella ad ED, e EF, eF si conducano dai punti E, e; indi dal foco F si eciti FP normale alle parallelle FB ED. Chiamisi Ee = z, DE = s, PD = x; sarà PE = x−s, se P cade dentro la curva; se cade fuori sarà PE = s−x. Dunque Pe = z−x+s: poiché se P cade dentro la curva, si dee togliere PE da Ee, se cade fuori, si deve aggiungere. Nelle altre

ritengansi le denominazioni della superiore propo=sizione. Abbiamo per la proprietà della sezi=one

$BW : WF :: DE : EF = \frac{ns}{m}$

$m : n :: s : \frac{ns}{m}$. Di più

$BW : WF :: De : eF = \frac{ns+nz}{m}$

$m : n :: s+z : \frac{ns+nz}{m}$. Ma poichè

15.ª l'angolo è retto in P

$FE^2 - PE^2 = Fe^2 - Pe^2$, ed analiticamente

$\frac{n^2s^2}{m^2} - x^2 + 2sx - s^2 = \frac{n^2s^2 + 2n^2zs + n^2z^2}{m^2} - z^2 + 2zx - 2zs - x^2 + 2sx - s^2$.

e cancellati i termini identici

$0 = \frac{2n^2zs + n^2z^2}{m^2} - z^2 + 2zx - 2zs$, e trasporta=ti opportunamente i termini, e fatta la divisione per z, sarà

12, 13.ª $\frac{m^2-n^2}{m^2} \cdot z = 2x - 2s \cdot \frac{m^2-n^2}{m^2}$: Dunque

$z = \frac{2m^2x}{m^2-n^2} - 2s$.

Corol. 1.° Dal calcolo abbiamo trovato

$Ee = \frac{2m^2x}{m^2-n^2} - 2s$. Perciò Ee divisa per metà in O, sarà

$OE = \frac{m^2x}{m^2-n^2} - s$, ed aggiunta la $DE = s$, sarà

$OD = \frac{m^2x}{m^2-n^2}$: tolta da questa $DP = x$, sarà

$OP = \frac{m^2x}{m^2-n^2} - x = \frac{n^2x}{m^2-n^2}$.

Corol. 2.° Dal Corol. antecedente abbiamo

$$OD : OP :: \frac{m^2 x}{m^2-n^2} : \frac{n^2 x}{m^2-n^2} :: m^2 : n^2.$$

Ma per il Corol. 1.° della propos. superiore

$$KB : KF :: \frac{m^2}{m-n} : \frac{n^2}{m-n} :: m^2 : n^2,$$ cioè

nella stessa proporzione: Dunque

$OD : OP :: KB : KF$. Perciò, se la corda Ee, sarà divisa per metà in O, starà $OD : OP :: KB : KF$: E se questa proporzione vale, la corda Ee, sarà tagliata a mezzo in O.

Determinazioni

Nella Elissi, in cui m^2-n^2 è sempre quantità positiva, è necessario, che i punti O, e cadano dopo i punti D, E. Fig.ª 11.ª

Il che avviene nella Parabola, se però la detta linea non sarà parallella all'asse. Fig.ª 12.ª

Ma nell' Iperbola, se la detta linea sarà inclinata nella direttrice in modo, che il seno tutto al seno dell'angolo d'inclinazione sia in maggior ragione di $FV : VA$, lo stesso accade, che nella Elisse, poichè in questa prima supposizione m^2-n^2 è positiva. Se il seno tutto sarà al seno dell' angolo d'inclinazione, come $FV : VA$, lo stesso avviene, che nelle linee parallelle all'asse della Parabola, cioè l'altro punto del concorso sarà a una infinita distanza dal primo: poichè $m^2-n^2=0$. Fig.ª 13.ª Fig.ª 14.ª

Finalmente se il seno tutto al seno dell'angolo d'inclinazione sarà in minor ragione di $FV : VA$, i punti O, e caderanno dopo i punti E, D. Fig.ª 15.ª

Prop. IV

Trovare una linea, che tagli per mezzo tutte le corde d'una sezzione paralelle ad una data. Fig.ª 11.ª, 12.ª, 13.ª 14.ª, 15.ª

Si tiri BWF per il foco F paralella alla data linea, e si tagli per metà W w in K, e ad essa dal punto F si eriga la normale FP, che tagli la direttrice in A, dal qual punto conducasi AK: dico, che da questa vengono divise egualmente tutte le corde paralelle a BF.

Dim.º Conducasi FB paralella alla corda Ee, la quale prodotta tagli la direttrice in D, ed AF in P: è manifesto, che sarà OD: OP:: KB: KF. Dunque per il cor. 2.º della propne superiore Ee sarà divisa egualmente in O. Il che potendosi dimostrare dell'altre, è chiaro, che tutte le corde paralelle a una data sono divise egualmente dalla retta AK.

Definizioni

La linea AK in avvenire chiamerassi il diametro: le corde Ee divise da essa per mezzo, le sue ordinatamente applicate; e loro metà si chiameranno le ordinate al diametro. Che se il diametro divide le sue ordinatamente applicate ancora ad angolo retto, dirassi asse.

Prop. V

Qualunque diametro passa per il centro della Sezzione.

Dim.º Per il centro C, tirisi Ss paralella alla retta W w. Dunque per la antecedente Ss ri=

22

che divisa per mezzo dal diametro AK prodotto: ma la stessa resta tagliata egualmente dal centro C per il Cor. 2º. della pr. 4 C. 1. Dunque ecc.

Corol. Le linee parallele alle ordinatamente applicate, che si tirano dai punti T, t, dove il diametro taglia la curva, sono tangenti della curva.

Determinazioni.

Nella Elisse niente v'à di particolare, che debba essere determinato. Questo però devesi avvertire, che in essa altro asse non si può dare tottone il primo e 'l secondo. Imperciochè, poichè la retta HF fà un retto angolo colle ordinatamente applicate l'angolo HKW, che è formato dal diametro, e dalle sue ordinatamente applicate è minore d'un retto col divario dell' angolo KHF: se dunque questo non divien zero, e svanisca, non può mai avvenire, che l'angolo AKW eguagli un retto: mà l'angolo KHF non può svanire, se o CH non coincide con CA, onde nasce il primo asse, o CH non diventi parallella ad AA, onde l'asse secondo. Dunque nessun'altro asse si può trovar nell' Elisse. Fig.a 11.a

Ma in quella specie d'Elisse, in cui la direttrice è a una infinita distanza dal vertice, cioè nel circolo, poichè il centro e 'l foco convengono nello stesso punto, è evidente, che l'angolo CHF sarà sempre = 0. Perciò nel circolo tutti i diametri sono assi.

È facile a sapere ciò che avvenga nella Parabola. Imperciochè dirigendosi il diametro AK à un centro infinitamente distante, è necessario, che Fig.a 12.a

23 tutti i diametri siano tra di loro paralelli. La quale verità dimostrasi ancora con questo spedito metodo. Poiche dal punto W conducasi WZ normale alla direttrice, la quale $WZ = FW = n$ per la proprietà della Parabola; poiche si ritengono le denominazioni già poste: Dunque $ZB = \sqrt{m^2-n^2}$. Ma $ZB : WZ :: BF : FH = n\sqrt{m+n}$.

$$\sqrt{m^2-n^2} : n :: m+n : \frac{n \cdot \overline{n+m}}{\sqrt{m^2-n^2}}$$

11.ª Dunque $FH = \frac{n\sqrt{m+n}}{\sqrt{m-n}}$: ma la quantità $\frac{n\sqrt{m+n}}{\sqrt{m-n}}$ è mezza proporzionale tra $m+n$, ed $\frac{n^2}{m-n}$: cioè trà FB ed FK, che a quelle si agguagliano. Dunque FB, FH, FK ∺. Dunque l'angolo KHB è retto. Perciò tutti i diametri fanno un retto angolo colla direttrice, dunque sono trà di loro paralelli, siccome ancne lo sono all'asse

Nella Iperbola se il seno tutto al seno dell'angolo d'inclinazione averà maggior proporzione di FV : VA, sarà $BW > WF$, e l'altro punto del concorso w caderà dopo i punti B, W, F. Onde il diametro CHK entrerà nella sezione, e la taglierà nei punti I. t Fig.ª 13.ª

Se il seno tutto starà al seno dell'angolo d'inclinazione, come FV : VA, il diametro HC, che passa per il centro C dirigerasi ad un punto posto in BF, che dal punto F è infinitamente lontano: Fig.ª 14.ª

12.ª Dunque sarà paralello alla stessa BF. Il che se si voglia con altro metodo dimostrare, si potrà

-are così. Dal punto W tirisi WZ parallela all'asse. Poichè FB è divisa per mezzo in W, WZ sarà la metà di FA. Ma $FA = a+b$. Dunque $WZ = \frac{a+b}{2}$. ma $VA : VF :: ZW : WF$, oppure analiticamente $a : b :: \frac{a+b}{2} : m$. Dunque

$m = \frac{\overline{a+b} \cdot b}{2a}$. Dunque $FB = \frac{\overline{a+b} \cdot b}{a}$. Dunque

$AB = \sqrt{\frac{\overline{a+b}^2 \cdot b^2}{a^2} - \overline{a+b}^2} = \frac{\overline{a+b}}{a} \cdot \sqrt{b^2 - a^2}$. Mà

$AB : AF :: AF : AH$

$\frac{a+b}{a} \sqrt{b^2-a^2} : a+b :: a+b : \frac{\overline{a+b} \cdot a}{\sqrt{b^2-a^2}} = \frac{a\sqrt{a+b}}{\sqrt{b-a}}$.

Dunque $AH = \frac{a\sqrt{a+b}}{\sqrt{b-a}}$: mà $\frac{a\sqrt{a+b}}{\sqrt{b-a}}$ è mezza proporzionale tra $a+b$, ed $\frac{a^2}{b-a}$, cioè tra FA, AC: purchè questa considerisi come positiva. Dunque FA, AH, AC $\div$. Dunque l'angolo FHC è retto, ed HC parallela ad FB.

Il diametro AC, e quello, che similmente si determina nell'altra parte dell'asse, chiamansi gli Assintoti dell'Iperbola.

Finalmente se il seno tutto sarà al seno dell'angolo d'inclinazione in minor proporzione di FV:VA il punto W cade dopo i punti F, W, B: laonde il diametro AK giacerà tra i rami opposti della Iperbola ne mai verrà a tagliarli. Fig. 15.a

Nella Iperbola fuori del primo e del secondo asse, i quali abbiamo già altrove determinati, nessuno altro se ne può avere: il che potrà essere

dimostrato nella Iperbola collo stesso metodo, con cui l'abbiamo dimostrato nella Elisse.

Lemma.

Se fuori della linea AR siano dati due punti F, C posti nella stessa linea CA perpendicolare ad AR, dai quali a unqualche punto H siano condotte CH, FH. Indi dal punto F si abassi ad HC la perpend. FP, la qual prodotta concorra in R con HA: e dal punto R si conduca RC, e si produca HF in Q: dico in primo luogo, che l'angolo FQC è retto: 2° che l'angolo FHP = FRQ. Fig.ª 16.ª 17.ª

Dim.° I triangoli FPC, FAR, che hanno in P, ed A gli angoli retti, ed in F gli angoli al vertice eguali, sono simili. Nello stesso modo sono simili i triangoli FPC, HAC, che hanno gli angoli retti in P, ed A, e l'angolo in C commune. Dunque saranno eziandio simili i triangoli HAC, FAR, e valerà questa proporzione FA : AH :: AR : AC. Dunque il rettang. CAF = HAR. Perciò prodotta CA in B in modo, che sia BA = AF, sarà il rettang. CAB = HAR. Dunque si può descrivere un cerchio che passi per i punti H, B, R, C: il quale descritto si conducano HB, BR. E' evidente, che i due triangoli HBR, HFR sono eguali in tutto: Dunque l'angolo FHR = BHR. Ma questo = BCR, poichè insistono sullo stesso arco BR. Dunque l'ang. FHR = BCR. Dunque i due triang. FAH, FQC sono simili: perciò l'angolo FQC = FAH: poichè l'uno, e l'altro è retto.

26

Inoltre i due triang. rettangoli FHP, FRQ, che hanno gli angoli al vertice in F, sono simili. Dunque $PHF = QRF$.

Corol. Due casi s'hanno a distinguere, il primo cioè, quando i punti F, C giacciono dalla stessa parte della linea AR, il 2°, quando la linea AR è in mezzo ai punti F, C. Nel primo caso l'angolo FHC coincide coll'angolo FHP, il quale essendo eguale all'angolo FRQ, o FRC, sarà $FHC = FRC$. Mà nel 2° caso FHP è il complemento a due retti dell'ang. FHC: Mà $FHP = FRQ$, o FRC. Dunque il complemento a due retti dell'ang. FHC è eguale all'angolo FRC. Fig.a 16.a Fig.a 17.a

Prop. VI

Se un'altro diametro RC divide per metà tutte le corde parallelle al diametro AC, dico, che questa è parallella a quelle, che ordinatamente si applicano al diametro AC. Fig.a 11.a 13.a 15.a

Dim.e Sia LF parallella al diametro AC, e ad essa conducasi la normale FR; Dal punto R si conduca RC: è chiaro, che RC divide egualmente tutte le corde parallelle ad AC. Perlochè deesi dimostrare, che RC è parallella ad $\omega K \omega$, la quale è una delle ordinatamente applicate al diametro AC.

Nella Elisse. Per le parallelle CA, LF, l'angolo $CAF = AFL$. Mà $AFL = BFR$; Poichè essendo gli angoli AFB, LFR retti tolto il commune LFB, rimanerà $AFL = BFR$. Fig.a 11.a

27 mà per il nostro lemma CHF = CRF. Dunque BFR = CRF. Dunque FB, CR saranno paralelle.

16.a Nella Iperbola. Se il diametro CHK è di quelli, che entrano nella sezione, in tal maniera dimostrasi a proporre: per le paralelle CH, FL, i due angoli CHF, HFL agguagliano due retti: Mà HFL = RFK: poiche i due angoli RFL, HFK sono retti. Dunque tolto RFH commune, il 17.a rimanente è HFL = RFL, il quale perciò sarà il complemento a due retti dell'angolo CHF. Dunque gli angoli CHF, RFB sono eguali: Mà per il lemma CHF insieme con CRF sono eguali a due retti: Dunque anche CRF con RFB a due retti: Dunque CR, FB sono paralelle. Fig.a 13.a

13.a 15 Mà se CH è di quei diametri, che non entrano nella sezione; per le paralelle CH, LF, l'angolo CHF = HFl: Mà HFl = RFK. Il che si avrà chiaro, se dai due retti RFl, HFK si toglierà il commune HFR: e di più per il lemma CHF, CRF fanno due retti: Dunque RFK, CRF fanno due retti. Dunque CR, FBK sono paralelle. Fig.a 15.a

Definizione.

Tali diametri, che sono costituiti in modo che ogn'uno taglia per metà le corde all'altro paralelle, si denominano diametri coniugati. Che se li tagliano eziandio ad angoli retti, si chiamano

assi conjugati. Onde avviene, che il primo, e 'l secondo asse sì nella Elisse, che nella Iperbola sono assi conjugati. Mà il primo diametro si chiama quel solo, che taglia la sezzione. Perciò nella Elisse è libero considerar qualunque diametro per il primo: non già così nella Iperbola: quello però, che come conjugato al primo diametro si riferisce, chiamasi o conjugato, o secondo.

Alcune Determinazioni

E' chiaro, che la Teoria dei diametri conjugati non può spettare in alcun modo alla Parabola, che à il centro infinitamente distante.

Resta dunque solamente, che vediamo ciò che accada nella Iperbola, quando le ordinatamente applicate al diametro cadono talmente nella direttrice, che il seno dell'angolo retto stà al seno dell'angolo d'inclinazione, come FV : VA. nella quale Ipotesi anche il diametro AC, che è un' assintoto, è parallelo alle sue ordinatamente applicate, ed FP normale alla retta FB cade nel punto A. Dunque i diametri conjugati convengono nella stessa retta AC. Fig.^a 14.^a

Scolio.

Quando dico diametri analoghi, intendo di quelli, che fanno angoli eguali col primo ABC; cioè quelli, che tagliano la direttrice in punti equidistanti dal punto A. Prendasi dunque AH = Ah, e conducansi HC, hC: questi si chiameranno diametri analoghi. Ma sebbene condotte AF, hF Fig.^a 18, 19.^a Fig.^a 18.^a

nell' Elisse, gl'angoli CHF, ChF sono eguali, pure CH, Ch non sono in alcun modo diametri conjugati: poichè mancano delle altre condizioni, cioè, che HF tagli ad angoli retti Ch, e le sue parallelle, ed hF sia perpendicolare ad AC ed alle sue parallelle. Perciò nella Elisse i diametri conjugati fanno angoli eguali con quelle rette, che dal foco si tirano ai punti della intersezzione colla direttrice: non però tutti i diametri, che fanno questi angoli eguali, sono diametri conjugati.

Una simile riflessione deve aver luogo nella Iperbola: imperciocchè preso il punto R con questa condizione, che l'angolo CRF compia due retti coll'angolo ChF, non pertanto CR, Ch sono diametri conjugati, poichè è agevole il dimostrare, che non hanno tutte le altre necessarie condizioni. Fig.ª 19.ª

Per determinare sicuramente a un dato diametro CH il suo conjugato, descrivasi un arco di cerchio, che comprenda l'angolo CHF, il quale necessariamente taglierà in due punti h, e R la direttrice, l'uno de' quali h corrisponde al punto H; poichè l'uno e l'altro sono egualmente lontani dal punto A. Il punto h non fa al caso, perchè esso determina il diametro analogo, ma non il conjugato. L'altro punto R è quello che si cerca, dal quale condotta la RC, si averà il diametro conjugato al primo. Poichè la condotta AF in M, taglierà perpendicolarmente il diametro CR, la qual condizione ricercasi as:

30 punto perchè i diametri siano conjugati. Ciò non è difficile a dimostrarsi.

Imperochè per la proprietà del cerchio, sarà CA : Ah = AH :: AR : AF. Dunque i due triangoli AFR, AHC sono simili. Dunque l'angolo AFR = AHC = AhC. Mà l'angolo HFR = FMR + FRM: e lo stesso HFR = HFA + AFR = hFA + AhC. ~~Tolgasi~~ Dunque FMR + FRM = hFA + AhC. Tolgasi dall'una parte l'angolo FRM, dall'altra l'ad esso eguale FhC, sarà il residuo FMR = hFA + AhF. Mà questi insieme presi sono eguali a un retto. Dunque FMR è retto: Dunque HFM cade perpendicolarmente sopra CR.

Ancora con un altro metodo si può determinare il diametro conjugato. Producasi CA in B, fino che sia BA = AF: indi per i trè punti C, F, B descrivasi un cerchio, il quale taglierà di nuovo la direttrice in R, si conduca CR; questa sarà il diametro conjugato al primo CA: il che è troppo chiaro dalle premesse. Fig. 10.a, 11.a

Non hò stimato soverchio l'esporre l'uno e l'altro metodo, perchè il primo è più utile nell'Iperbola, l'altro nell'Ellisse: poichè gli altri richiederebbero per lo più dei cerchi grandissimi, il che non sarìa di poco incommodo a quello che li volesse descrivere.

CAP. III

Delle proprietà dei diametri, e delle tangenti, e delle equazioni ai diametri.

Prop. I

Se la retta GT tocca la Sezione in T, e taglia la direttrice in G, e dai punti T, G si conducano al foco le rette TF, FG, dico, che queste vengono a formare un angolo retto. Fig.ª 11.ª 12.ª 13.ª

Dim.º Se si concepisce moversi la retta DEO con un moto parallelo, è chiaro, che allora diviene tangente, quando EO svanisce, e sarà = 0. Onde essendo EO per il Coros. 1º della Prop. 3ª del cap. 2º $= \frac{m^2x - s}{m^2 - n^2}$ [ritenendo le denominazioni ivi poste, sarà $\frac{m^2x}{m^2-n^2} - s = 0$, cioè $x = GM = \frac{m^2-n^2}{m^2} \cdot s$. Dunque TM $= s - \frac{m^2+n^2}{m^2} \cdot s = \frac{n^2 s}{m^2}$. Ma $TF = \frac{ns}{m}$: Dunque poichè $s, \frac{ns}{m}, \frac{n^2s}{m^2}$ ∺, saranno ancora GT, TF, TM, che a quelle si agguagliano, in proporzione continua. Dunque l'angolo TFG è retto.

Prop. II.

La tangente fà angoli eguali colle linee, che si conducono dal punto del contatto ai due fuochi. Fig.ª 11.ª 12.ª 13.ª

La linea Gg tocchi la sezione in T, e tagli le due direttrici nei punti G, g: dal punto del contatto T si conducano TF, Tf ai due fuochi: s'hà a dimostrare, che gli angoli GTF, gTf so=

no eguali. Si congiungano GF, gf, le quali per la precedente fanno angoli retti con TF, Tf. E' evidente per la proprietà della sezione, che stà $GT : TF :: gT : Tf$. Dunque elevando al quadrato $GT^2 : TF^2 :: gT^2 : Tf^2$. Mà $GT^2 = GF^2 + TF^2$, e $gT^2 = gf^2 + Tf^2$. Dunque $GF^2 + TF^2 : TF^2 :: gf^2 + Tf^2 : Tf^2$ e divid.do $GF^2 : TF^2 :: gf^2 : Tf^2$: Dunque $GF : TF :: gf : Tf$. Dunque i due triangoli rettangoli GFT, gfT hanno i lati proporzionali intorno agli angoli retti, e perciò sono simili. Dunque l'angolo $GTF = gTf$.

Determinazioni

Nella Iperbola la tangente gGT divide l'angolo fTF, il quale perciò taglia per mezzo. il che non accade nell'Elisse, in cui gli angoli eguali tengono in mezzo l'angolo FTf. Fig.^{ra} 13.^{a}

Nella Parabola quella linea, che dal punto del contatto dirigesi al foco infinitamente distante si fà parallela all'asse, e coincide colla linea TK; Perciòche qui angoli GTF, gTK saranno eguali. Lochè puossi ancora con un'altro metodo dimostrare. Imperciochè per la proprietà della Parabola $FT = TF$. Dunque poichè FM cade perpendicolarmente nella base AF del triang. Isoscele ATF, dividerà per mezzo l'angolo ATF: Dunque $ATG = GTF$. Mà ATG è al vertice con gTK: Dunque $GTF = gTK$. Fig.^{ra} 12.^{a}

Corol. Se nell'Elisse si produce FT fino che concorre con fM in N, che dal foco si tira normale Fig.^{a} 11.^{a}

ella tangente, sarà $fN = TF$. Mà $fT + TF$ è eguale al primo asse Vu. Dunque parimente fN s'agguaglierà al primo asse.

Similmente nella Iperbola fT concorra colla predetta normale nel punto N, $TN = Tf$. Mà $fT - TF = Vu$: Dunque ancora $fN = Vu$. Fig. 13.ª

Mà nella Parabola FN, che dal foco si tira normale alla tangente, se producesi fino che $NM = MF$, il punto N cade nella direttrice. Fig.ª 12.ª

È chiaro, che nell'Elisse sarà sempre $AT > TF$, cioè quella parte di diametro, che resta intercetta trà la direttrice e la curva è sempre maggiore di quella linea, che congiunge il foco col punto dell'intersezzione della curva e del diametro. Fig.ª 11

Nella Parabola sempre $AT = TF$, poichè AT è parallela al primo asse.

Mà nella Iperbola (veggasi la fig.ª 14, ne' primi agli assintoti) se il diametro taglia la direttrice fra i punti A, t, non taglierà più la curva, mà dividerà per mezzo tutte le corde intercette trà i rami opposti. Che se il diametro cade fra i punti t, A allora farà un'angolo colla direttrice maggiore dell'angolo tA, e perciò ancora FBA sarà maggiore di CtA. Dunque il seno tutto al seno dell'angolo d'inclinazione fatto dal diametro colla direttrice averà minor ragione di $FU : VA$. Dunque il diametro caderà nella curva in maniera, che la parte intercetta trà la direttrice e la curva sarà minore di quella linea, che congiunge il foco col punto della intersezzione nella curva Dunque tutti i primi diame= Fig.ª 15.ª

tri [vedi. a fig. antecedente] averanno la parte AT < TF.

Prop. III

Determinare coll'Equazione Analitica, quale proporzione passi tra le parti del primo asse, e le sue ordinate. Fig. 1.[a] 2.[a] 3.[a]

Chiamisi $V_2O=x$, $E_2O=y$, e ritenute tutte le altre denominazioni, delle quali si siamo serviti nel cap. 1.° sarà $A_2O=DE=a+x$, $F_2O=x-b$, ò $b-x$: Dunque $EF=\sqrt{b^2-2bx+x^2+y^2}$. Dunque essendo per la proprietà della sezzione $AV:VF::DE:EF$, sarà analiticamente $a:b::a+x:\sqrt{b^2-2bx+x^2+y^2}$: Dunque moltiplicando gli estremi, e i mezzi

$a\cdot\sqrt{b^2-2bx+x^2+y^2}=b\cdot a+x$, ed elevando al quadrato

$a^2b^2-2a^2bx+a^2x^2+a^2y^2=a^2b^2+2ab^2x+b^2x^2$, e cancellato d'ambe le parti il termine commune a^2b^2 e trasportati gli altri opportunamente sarà $a^2y^2=2ab^2x+2a^2bx-a^2x^2+b^2x^2$, e fatta la divisione per a^2-b^2, sarà

$$\frac{a^2y^2}{a^2-b^2}=\frac{2abx}{a-b}-x^2.$$

Corol. 1.° Si converta l'equazione in questa analogia

$\frac{2bax}{a-b}-x^2:y^2::a^2:a^2-b^2$. Ma poichè $\frac{2ab}{a-b}=Vu$, il rett. $\frac{2ba}{a-b}-x\cdot x=$ rett. V_2Ou:

Dunque il rett. $DzDu$ è al quadrato ezD in ragione costante.

Corol. 2.° Dispongasi l'analogia a questo modo

2 $\frac{2abx}{a-b} - x^2 : y^2 :: \frac{a^2b^2}{\overline{a-b}^2} : \frac{\overline{a^2-b^2}\cdot b^2}{\overline{a-b}^2} = \frac{\overline{a+b}\cdot b^2}{a-b}$. Ma $\frac{a^2b^2}{\overline{a-b}^2}$ è il quadrato della metà dell'asse, lC, ed $\frac{\overline{a+b}\cdot b^2}{a-b}$ è il quadrato della metà dell'asse 2.° Ti. Dunque il rett. $DzDu$ stà al quadr. EzC, come il quadrato lC al quadr. Ti; o come il quadr. lu al quadrato Tb.

Corol. 3.° Dispongasi l'analogia in questa maniera

$\frac{2abx}{a-b} - x^2 : y^2 :: \frac{2ab}{a-b} : \frac{2b\cdot\overline{a^2-b^2}}{a\cdot\overline{a-b}} = \frac{2b\cdot\overline{a+b}}{a}$.

La quantità $\frac{2ab}{a-b}$, come è noto, esprime il pro asse, la quale chiamasi eziandio il lato transverso; la quantità $\frac{2b\cdot\overline{a+b}}{a}$ chiamerasi da quà innanzi il lato retto, o pure il parametro. Il parametro perciò è la quarta proporz. doppo AD, il doppio di DF, ed AF.

Corol. 4.° Poichè lu stà al parametro, come il quadr. lu, a Tb, il parametro del pro asse è la terza proporz. doppo il pro del secondo asse.

Determinazioni.

Per ciò che riguarda dell'Elisse, non abbisognano altre parole, poichè ciò, che si è esposto nella prop. e nei Corollarj vagliono si be=

ne, che nulla v'hà da mutarsi. Questo solo ci piace avvertire, cioè che quella specie d'Elisse, in cui i due lati, cioè a dire il retto, e il transverso sono eguali, non può essere che un cerchio. Poichè in questa Ipotesi valerà l'equazione $\frac{2ab}{a-b} = \frac{2b \cdot a}{a+b}$, cioè $a^2 = a^2 - b^2$: Dunque $\frac{0^2}{0} = a^2$, e $\frac{b}{0} = \infty$. $AV = \infty$ perciò sarà infinita, che è proprietà del cerchio, come abbiam detto. Mà questo ancora più facilmente si avria potuto conoscere dall'esser l'asse primo eguale al secondo.

Molte cose si devono rimarcare nella Parabola. Primieramente moltiplichisi l'equazione descritta nella prop. per $a-b$, e troverassi Fig.ª 2ª
$\frac{a^2y^2}{a+b} = 2abx - x^2 \cdot \overline{a-b}$. Mà perchè nella Parabola $a=b$, se in vece di b si sostituisce a, l'ultimo termine dell'Equazione svanirà, e l'equazione sarà più semplice $\frac{a^2y^2}{2a} = 2a^2x$, cioè $y^2 = 4ax$: Dunque il quadrato della ordinata EO sarà quadruplo del rett. AV, O.

Il lato transverso, poichè la sua espressione dividesi per $a-b=0$, sarà infinito. Mà il lato retto, cioè $\frac{2b \cdot a+b}{a}$ sarà eguale à $4a$. Onde il rett. del lato retto nell'abscissa è eguale al quadrato della ordinata.

Nella Iperbola finalmente, in cui $b>a$ mutati tutti i segni nella Equazione, che hò esposto nella prop. diverrà $\frac{a^2y^2}{b^2-a^2} = \frac{2bax}{b-a} + x^2$, Fig.ª 3ª

dalla quale si proverà arguire, che il rett. VrOu stà al quadr. Erl, come il quadr. del pmo asse Vu al quadrato dell'altro asse Tt, oppure come il lato transverso Vu al lato retto, che sarà terza proporz. dopo il pmo, e'l secdo asse. Che se saranno equali il pmo e'l secdo asse, o il lato retto, e'l transverso, chiamisi l'Iperbola Equilatera. In questa supposizione sarà $\frac{2ab}{b-a} = \frac{2b \cdot \overline{a+b}}{a}$, cioè $a^2 = b^2 - a^2$; oppure $2a^2 = b^2$, ovvero $a\sqrt{2} = b$.

Prop. IV

Determinar le equazioni delle sezzioni coniche, quando le abscisse prese nel primo o nel secdo asse cominciano nel centro, o quando si prendono nel vertice dell'altro asse.

Questa prop. non appartiene alla Parabola, poichè ella hà ad un'infinita distanza il centro, e l'altro asse.

Per l'Elisse si faccia $CrO = z$ sicchè sia $\frac{ab}{a-b} - z = x = VrO$, ed $\frac{ab}{a-b} + z = urO$: Dunque il rett. $VrOu = \frac{a^2b^2}{\overline{a-b}^2} - zz$. Ma il rettang. VrOu stà al quadr. $SrO :: VC^2 : TC^2$, o come Vu al parametro: Dunque Fig.a 1.a

$\frac{a^2b^2}{\overline{a-b}^2} - z^2 : y^2 :: \frac{a^2b^2}{\overline{a-b}^2} : \frac{\overline{a+b} \cdot b^2}{a-b}, o :: \frac{2ab}{a-b} : \frac{2b \cdot \overline{a+b}}{a}$,

dalla quale analogia si raccoglie, che la diffe=

26

renza dei quadrati CU, CO ~~sono~~ è nella sudetta proporzione col quadrato della ordinata.

Che se $CO = EO = z$ come ordinate si prendano, ed $EO = CO = y$ come ascisse poste nell'asse secdo, si potrà disporre l'equaz. a questo modo

$\frac{\overline{a+b}\cdot b^2}{a-b} - \frac{z^2\cdot\overline{a^2-b^2}}{a^2} = y^2$, cioè traslati i termini $\frac{\overline{a+b}\cdot b^2}{a-b} - y^2 = \frac{z^2\cdot\overline{a^2-b^2}}{a^2}$, e formandone l'analogia $\frac{\overline{a+b}\cdot b^2}{a-b} - y^2 : z^2 :: a^2-b^2 : a^2$, dalla quale, poichè $\frac{\overline{a+b}\cdot b^2}{a-b}$ è il quadrato della metà del secdo asse, è manifesto, che la diferenza dei quadrati CT, CO stà al quadrato di CE in ragione costante $a^2-b^2 : a^2$, la quale è la stessa che questa proporzione $\frac{b^2\cdot\overline{a+b}}{a-b} : \frac{b^2a^2}{\overline{a-b}^2}$, cioè del quadrato CT al quadrato CV. Quella stessa proporzione è la medesima con questa

$\frac{2b\cdot\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} : \frac{2ba^2\sqrt{a-b}}{\overline{a-b}^2\cdot\sqrt{a+b}}$, la quale quantità sarà il parametro del secdo asse, la quale consta essere terza proporz. dopo il 2.° e 'l primo asse.

Finalmente se le ascisse nell'asse 2.° cominciano in T, chiamisi $TO = u$: Dunque $\frac{b\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} - u = y$, il qual valore sostituito nell'ultima formola esibisce questa proporzione.

39

$\frac{2ou\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} - u^2 : z^2 :: a^2 - b^2 : a^2$, dalla quale parimente si ricava che il rett. TO t sta al quadrato OE nella stessa ragion costante, vale a dire come $TC^2 : CU^2$, o come Tt al parametro dell'asse secondo.

Veniamo all'Iperbola, nella quale se chiamasi $C2O = z$, sarà $z - \frac{ab}{b-a} = x = V2O$, e $z + \frac{ab}{b-a} = u2O$. Dunque il rett. $V2Ou = z^2 - \frac{a^2b^2}{\overline{b-a}^2}$; ma questo rett. sta al quadrato $E2O$ in ragione costante di $Vu^2 : Tt^2$, o di Vu al parametro. Dunque

Fig.a 3.a

$z^2 - \frac{a^2b^2}{\overline{b-a}^2} : y^2 :: \frac{a^2b^2}{\overline{b-a}^2} : \frac{\overline{a+b} \cdot b^2}{b-a}$, ovvero $\frac{2ab}{b-a} : \frac{2b \cdot \overline{a+b}}{a}$

dalla quale analogia si ricava, che la differenza dei quadrati, $C2O$, CV^2 sta al quadrato $E2O$ nella sudetta costante proporzione.

Che se consideriamo $C2O = EO$ come ordinata ed $E2O = OC$ come absissa, dalla analogia superiore raccoglierasi facilmente questa equazione

$y^2 + \frac{b^2 \cdot \overline{b+a}}{b-a} = z^2 \cdot \frac{\overline{b^2 - a^2}}{a^2}$, oppure

$y^2 + \frac{b^2 \cdot \overline{b+a}}{b-a} : z^2 :: b^2 - a^2 : a^2$, ovvero

$y^2 + \frac{b^2 \overline{b+a}}{b-a} : z^2 :: \frac{b^2 \cdot \overline{b+a}}{b-a} : \frac{b^2 a^2}{\overline{b-a}^2}$, cioè

$y^2 + \frac{b^2 \cdot \overline{b+a}}{b-a} : z^2 :: \frac{2b\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}} : \frac{2ba^2\sqrt{b-a}}{\overline{b-a}^2\sqrt{b+a}}$.

Dalle quali tutte analogie insieme si raccoglie, che la somma dei quadrati TC^2, OC^2 stà al quadrato OE, come il quadr. del semiasse secōdo al quadr. del semiasse primo, oppure come l'asse secōdo al parametro dell'asse secōdo.

Che se consideriamo il principio delle abscisse nel punto T, non potiamo avere tanta semplicità nelle equazioni, quanta n'ebbimo nell'Elisse. Poichè se si chiama $TO = u$, sarà $y = \frac{b\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}} - u$, sostituito il qual valore in alcuna delle sudette analogie, sarà

$$\frac{b^2 \cdot \overline{b+a}}{b-a} + \frac{b^2 \cdot \overline{b+a}}{b-a} - \frac{2bu\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}} + u^2 : z^2 :: b^2 - a^2 : a^2, \text{ cioè}$$

$$\frac{2b^2 \cdot \overline{b+a}}{b-a} - \frac{2bu\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}} + u^2 : z^2 :: b^2 - a^2 : a^2, \text{ la}$$

quale equazione, benchè sia verissima, pure per esser ella un pò implicata, per ora la lascieremo.

Scolio. Sono da notarsi con attenzione, e mettersi in memoria le equazioni, che appartengono ad ogni sezzione del cono. Esse sono tali, se per x s'indichino le abscisse, per y le ordinate, i due assi per le specie c, f, il parametro per p.

Alla Parabola $px = yy$

All'Elisse $2cx - x^2 : y^2 :: c^2 : f^2 :: 2c : p$. le abscisse cominciano nel vertice del primo asse c, se $c > f$, o di p: ma se $c < f$, o di p saranno le abscisse nel 2° asse, p è il parametro del 2° asse.

2. All' Elisse $c^2 - x^2 : y^2 :: c^2 : f^2 :: 2c : p$. le abscisse cominciano nel centro. Lo stesso vale degli assi, e dei loro parametri.

All' Iperbola $2cx + x^2 : y^2 :: c^2 : f^2 :: 2c : p$. c è il primo asse, f il secondo, p il parametro del primo asse; le abscisse cominciano nel vertice del primo asse.

All' Iperbola $x^2 - c^2 : y^2 :: c^2 : f^2 :: 2c : p$, le abscisse cominciano nel centro, e si prendono nel primo asse. Il resto come sopra.

All' Iperbola $f^2 + x^2 : y^2 :: f^2 : c^2 :: 2f : p$. le abscisse cominciano nel centro, e si prendono nel 2.° asse: c è il primo asse, f il secondo, p il parametro del 2.° asse.

Prop. V

Determinare la proporzione coll' equazione analitica, che passa trà le parti del primo diametro, e le sue ordinate. Fig. 11.ª 12.ª 13.ª

Oltre quelle denominazioni, che sono costanti, chiamisi $TF = e$: Dunque poichè stà $n : m :: TF : TS$, sarà $TS = \frac{me}{n}$. Mà poichè TS è tangente nel punto T, l'angolo TFS è retto. Dunque sarà $TS : TF :: TF : TM$, o analiticamente

$$\frac{me}{n} : e :: e : \frac{ne}{m}; \text{ perciò } TM = \frac{ne}{m}$$

Dunque $MS = \frac{me}{n} - \frac{ne}{m} = e \cdot \frac{m^2 - n^2}{mn}$. Onde $FM = \frac{e}{m}\sqrt{m^2 - n^2}$; poichè ella è mezza proporzionale trà TM, ed MS: Mà stà

$KF : TM :: AF = AM + MF : AM$, e dividendo
$KF - TM : TM :: MF : AM$, e per analisi

$$\frac{n^2}{m-n} - \frac{ne}{m} : \frac{ne}{m} :: \frac{e}{m}\sqrt{m^2-n^2} : AM = \frac{e^2\sqrt{m^2-n^2}\cdot\overline{m-n}}{m\cdot\overline{mn-me+ne}}$$

Dunque $AF = \frac{e^2\sqrt{m^2-n^2}\cdot\overline{m-n}}{m\cdot\overline{mn-me+ne}} + \frac{e}{m}\sqrt{m^2-n^2} = \frac{ne\sqrt{m^2-n^2}}{mn-me+ne}$

Si chiami $AT = c$: Ma $AT^2 = TM^2 + AM^2$. Dunque

$$c^2 = \frac{n^2e^2}{m^2} + \frac{e^4\cdot\overline{m^2-n^2}\cdot\overline{m-n}^2}{m^2\cdot\overline{mn-me+ne}^2}.$$ E perciò la quantità

c è data per le altre costanti e, m, n, ma a motivo d'eleganza e di facilità giova ritenere nel calcolo la specie c. Laonde essendo

$TM : KF :: AT : AK$, sarà per analisi

$\frac{ne}{m} : \frac{n^2}{m-n} :: c : AK = \frac{mnc}{me-ne}$. Infine diverrà

$TK = \frac{mnc}{me-ne} - c = \frac{c\cdot\overline{mn-me+ne}}{me-ne}$.

Questo posto se si fa $CE = y$, $DP = z$, $DE = s$, è chiaro per il Corol. 1.° della prop. 3.a del cap. 2.° che sarà $y = \frac{m^2 z}{\sqrt{m^2-n^2}} - s$: dal che ne proviene l'equazione seguente

[A] $s = \frac{m^2 z}{\sqrt{m^2-n^2}} - y$. Chiamisi $TO = x$. Poichè stà

$FB : DP :: AK : AT + TO$, sarà analiticamente

$m+n : z :: \frac{mnc}{me-ne} : c+x$: Dunque

$\frac{mncz}{me-ne} = \overline{c+x}\cdot\overline{m+n}$, oppure moltiplicando per $\frac{me-ne}{mnc}$

$z = \frac{\overline{c+x}\cdot e\cdot \overline{m^2-n^2}}{mnc}$, o moltiplicando per $\frac{m^2}{m^2-n^2}$

$\frac{m^2 z}{m^2-n^2} = \frac{\overline{c+x}\cdot me}{nc}$. Sostituiscasi questo valore

nella equazione A, e sarà

$s = \frac{me\cdot\overline{c+x}}{nc} - y$, quadrando la quale si averà

[B] $s^2 = \frac{m^2e^2\cdot\overline{c+x}^2}{n^2c^2} - \frac{2mey\cdot\overline{c+x}}{nc} + y^2$. Mà essendo

$BW : WF :: DE : FE$, sarà per analisi

$m : n :: s : FE = \frac{ns}{m}$. Così ancora

$KF : PO :: AK : AT+TO$; ed analiticamente

$\frac{n^2}{m-n} : PO :: \frac{mnc}{mc-ne} : c+x$. Dunque $PO = \frac{ne\cdot\overline{c+x}}{mc}$

e perciò $PE = y - \frac{ne\cdot\overline{c+x}}{mc}$. Finalmente vale la proporz.

$AK : TK-TO :: AF : PF$, e per analisi

$\frac{mnc}{me-ne} : \frac{c\cdot\overline{mn-me+ne}}{me-ne} - x :: \frac{ne\sqrt{m^2-n^2}}{mn-me+ne} : PF$.

Sarà pertanto $PF = \frac{e\sqrt{m^2-n^2}}{m} - \frac{e^2\cdot\overline{m-n}\cdot x\sqrt{m^2-n^2}}{mc\cdot\overline{mn-me+ne}}$

Ma poichè è $FE^2 = PE^2 + PF^2$, sarà

$$\frac{n^2s^2}{m^2} = y^2 - \frac{2ney\cdot\overline{c+x}}{mc} + \frac{n^2e^2\,\overline{c+x}^2}{m^2c^2} + \frac{e^2\cdot\overline{m^2-n^2}}{m^2}$$

$$- \frac{2e^3\cdot\overline{m-n}\cdot\overline{m^2-n^2}\cdot x}{m^2c\cdot\overline{mn-me+ne}} + \frac{e^4x^2\cdot\overline{m-n}^2\cdot\overline{m^2-n^2}}{m^2c^2\cdot\overline{mn-me+ne}^2}$$

oppure moltiplicando per m^2, e divid. per n^2

$$s^2 = \frac{m^2y^2}{n^2} - \frac{2mey\cdot\overline{c+x}}{nc} + \frac{e^2\cdot\overline{c+x}^2}{c^2} + \frac{e^2\cdot\overline{m^2-n^2}}{n^2} - $$

$$-\frac{2e^3x\cdot\overline{m-n}\cdot\overline{m^2-n^2}}{n^2c\cdot\overline{mn-me+ne}}+\frac{e^4x^2\cdot\overline{m-n}^2\cdot\overline{m^2-n^2}}{n^2c^2\cdot\overline{mn-me+ne}^2};$$

il qual valore, se si sostituisce nella equazione [B] proverrà l'equazione

$$\frac{m^2e^2\cdot\overline{c+x}^2}{n^2c^2}-\frac{2mey\cdot\overline{c+x}}{nc}+y^2=\frac{m^2y^2}{n^2}-\frac{2mey\cdot\overline{c+x}}{nc}+$$
$$\frac{e^2\cdot\overline{c+x}^2}{c^2}+\frac{e^2\cdot\overline{m^2-n^2}}{n^2}-\frac{2e^3x\cdot\overline{m-n}\cdot\overline{m^2-n^2}}{n^2c\cdot\overline{mn-me+ne}}+\frac{e^4x^2\cdot\overline{m-n}^2\cdot\overline{m^2-n^2}}{n^2c^2\cdot\overline{mn-me+ne}^2}.$$

Nella quale cancellati i termini, che si distruggono, ed opportunamente traslati i termini, che restano

$$\overline{\frac{m^2e^2}{n^2c^2}-\frac{e^2}{c^2}}\cdot\overline{c+x}^2-\frac{e^2\cdot\overline{m^2-n^2}}{n^2}+\frac{2e^3x\cdot\overline{m-n}\cdot\overline{m^2-n^2}}{n^2c\cdot\overline{mn-me+ne}}-$$
$$-\frac{e^4x^2\cdot\overline{m-n}^2\cdot\overline{m^2-n^2}}{n^2c^2\cdot\overline{mn-me+ne}^2}=\frac{\overline{m^2-n^2}\cdot y^2}{n^2}.$$

Dispongasi l'equazione in questa maniera

$$\frac{e^2\cdot\overline{m^2-n^2}}{n^2}+\frac{2e^2x\cdot\overline{m^2-n^2}}{n^2c}+\frac{e^2x^2\cdot\overline{m^2-n^2}}{n^2c^2}-\frac{e^2\cdot\overline{m^2-n^2}}{n^2}+$$
$$+\frac{2e^3x\cdot\overline{m^2-n^2}\cdot\overline{m-n}}{n^2c\cdot\overline{mn-me+ne}}-\frac{e^4x^2\cdot\overline{m^2-n^2}\cdot\overline{m-n}^2}{n^2c^2\cdot\overline{mn-me+ne}^2}=\frac{\overline{m^2-n^2}\cdot y^2}{n^2}$$

Cancella il primo termine che si distrugge, e dividi per $\frac{m^2-n^2}{n^2}$, e si farà

$$\frac{2e^2x}{c}+\frac{e^2x^2}{c^2}+\frac{2e^3x\cdot\overline{m-n}}{c\cdot\overline{mn-me+ne}}-\frac{e^4x^2\cdot\overline{m-n}^2}{c^2\cdot\overline{mn-me+ne}^2}=y^2;$$ la quale

se si riduce opportunamente, darà l'equazione cercata

$$\frac{2ex\cdot\overline{mn-me+ne}}{2me-2ne-mn}-x^2=\frac{c^2y^2\cdot\overline{mn-me+ne}^2}{e^2\cdot mn\cdot\overline{2me-2ne-mn}}.$$

Corol. 1.° Se l'ordinata $OE=y$ svanisce e diventi $=0$, è chiaro, che l'abscissa $TO=x$, o diventa nulla, o eguale a Tt: ma svanendo y

l'equazione locale si cambia in questa

$\frac{2c \cdot \overline{mn - me + ne}}{2me - 2ne - mn} - x \cdot x = 0$: Dunque fatta

la divisione per x, che dà un valore dell'absis-
sa $= 0$, il rimanente sarà $\frac{2c \cdot \overline{mn - me + ne}}{2me - 2ne - mn} - x = 0$,

ovvero $x = Tt = \frac{2c \cdot \overline{mn - me + ne}}{2me - 2ne - mn}$, che
dà il valore del diametro Tt, che si chiama
ancora il lato transverso.

Corol. 2° Si converta l'equazione nella
seguente analogia.

$\frac{\overline{mn - me + ne}}{2me - 2ne - mn} \cdot 2cx - x^2 : y^2 :: c^2 \overline{mn - me + ne}^2 : e^2 mn \cdot \overline{2me - 2ne - mn}$.

Dalla quale, poichè $\frac{\overline{mn - me + ne}}{2me - 2ne - mn} \cdot 2c = Tt$, è ma-
nifesto, che il rett. TOt è al quadrato OE in ragion costante.

Corol. 3° Dispongasi l'analogia in questa
maniera

$\frac{\overline{mn - me + ne}}{2me - 2ne - mn} \cdot 2cx - x^2 : y^2 :: \frac{2c \cdot \overline{mn - me + ne}}{2me - 2ne - mn} : \frac{2e^2 mn}{c \cdot \overline{mn - me + ne}}$,

dalla quale è chiaro, che il rettang. TOt stà al qua-
drato OE, come il lato transverso Tt alla quan-
tità $\frac{2e^2 mn}{c \cdot \overline{mn - me + ne}}$, la quale si chiamerà il parame-
metro di quel suo diametro Tt, la quale quan-
tità s'agguaglierà a questa

$\frac{2e \cdot mn}{m - n}$ divisa per $\frac{c \cdot \overline{mn - me + ne}}{me - ne}$, ovvero $\frac{2 TF \cdot KW}{TK}$.

Corol. 4° È evidente, che il rettang. TCt
$= TC^2$ è al quadr. CS, come il diametro Tt al suo

parametro. Dunque, come il rettang. TCF al quadrato OE, così il quadrato TC, al quadrato CS. Questo semidiametro conjugato CS esprimesi per $\frac{e\sqrt{mn}}{\sqrt{2me-2ne-mn}}$.

Quindi è facile il conoscere, che il parametro del diametro TF è terzo proporz. dopo TF Ss.

Prima di venire alle determinazioni, ci pare di dover premettere i due Lemmi seguenti.

Lemma I

In ogni Sezione TF è minore di KW. Fig.a 11.a 12.a 13.a

Dim.o In ogni Sezione TF è mezza proporzionale trà TM, e TS: Mà TM, TS sono minori delle rette KF, KB: Dunque TF è minore della mezza proporz. trà KF, e KB. Ma questa mezza proporz. è eguale à KW: Dunque TF è minore di KW.

Corol. Essendo $TF = e$, $KW = \frac{mn}{m-n}$, sarà in ogni sezzione $e < \frac{mn}{m-n}$: Dunque $\frac{mn}{m-n} - e$ è quantità positiva: Dunque ancora $mn - me + ne$ è quantità positiva. Non s'abbia scrupolo, perche io hò supposto $m > n$. Imperciochè se fosse $m < n$ non s'averebbe il punto T nella sezzione, non tagliando in questa ipotesi la curva il diametro della Iperbola.

Lemma II

Nella Elisse TF è maggiore della metà di KW, nella parabola eguale, nella Iperbola minore Fig.a 11.a 12.a 13.a

Dim.° Nella Elisse $TH > TF$: Dunque l'angolo THF è minore di HFT. Ma l'angolo HFK essendo retto è eguale agli angoli THF, HKF: Dunque l'angolo $TFK < TKF$. Dunque $TF > TK$. Dunque maggiormente $HT > TK$. E perciò HT è maggior della metà d'HK. Quindi TM, TS sono maggiori della metà delle rette KF, KB: Dunque la mezza proporzionale trà TM, e TS è maggiore della metà della mezza proporz. trà KF, e KB: Mà la prima mezza proporz. è TF, l'altra è KW: Dunque TF è maggior della metà di KW. Fig.ª 11.ª

Nella Parabola $HT = TF$: Dunque l'ang. $THF = TFH$: mà l'angolo HFK essendo retto, è eguale a $THF + TKF$: Dunque togliendo angoli eguali, sarà il residuo $TFK = TKF$. e perciò $TF = TK$: Dunque $HT = TK$. Dunque $HT = \frac{1}{2} HK$. Dunque $TM = \frac{1}{2} KF$, e $TS = \frac{1}{2} KB$. quindi la mezza proporz. trà TM e TS sarà eguale alla metà della mezza proporz. trà KF, e KB: mà la mezza proporz. trà TM, TS è TF, e l'altra è KW: Dunque $TF = \frac{1}{2} KW$. Fig.ª 12.ª

Nella Iperbola poichè $HT < TF$, colla stessa dimostrazione si fà vedere $TF < \frac{1}{2} KW$. Fig.ª 13.ª

Corol. Essendo $TF = e$, $KW = \frac{mn}{m-n}$, sarà nell'Elisse $e > \frac{mn}{2m-2n}$, cioè $2me - 2ne > mn$: Dunque $2me - 2ne - mn$ è quantità positiva. Fig.ª 11.ª

Nella Parabola $e = \frac{mn}{2m-2n}$, ovvero $2me - 2ne = mn$, Fig.ª 12.ª

ovvero $2me - 2ne - mn = 0$

Finalmente nella Iperbola $e < \frac{mn}{2m-2n}$, cioè Fig.ª 13.ª

$2me - 2ne < mn$. Dunque $2me - 2ne - mn$ è quantità negativa.

Determinazioni

Tutto ciò che fino ad ora s'è esposto nella Fig.ª 11.ª propne, e nei Corollarj conviene immutabilmente all'Elisse.

Ma nella Parabola, poichè $2me - 2ne - mn = 0$, si moltiplichi per questa quantità l'ultima Fig.ª 12.ª equazione della propne: Dunque sarà

$$\frac{c^2 \cdot \overline{mn - me + ne}^2 \cdot y^2}{c^2 mn} = \overline{mn - me + ne} \cdot 2cx - x^2 \cdot \overline{2me - 2ne - mn}.$$

Mà svanendo quest'ultimo termine si faccia la divisione per $mn - me + ne$, e sarà

$$\frac{c^2 y^2}{c^2 mn} \cdot \overline{mn - me + ne} = 2cx, \text{ cioè } y^2 = \frac{2c^2 mn \cdot x}{c \cdot \overline{mn - me + ne}}$$

Perciò il quadrato dell'ordinata è eguale al rettang. della abscissa, e del parametro. Mà poichè il parametro è eguale à $\frac{2\,TF \cdot KW}{TK}$, e nella parabola $TF = TK$. Dunque il parametro $= 2KW^2 = 4TT^2$.

Nella Iperbola, poichè la quantità $2me - 2ne - mn$ è negativa, mutati tutti i segni nella Fig.ª 13.ª ultima equazione della propne, sarà

$$\frac{c^2 \cdot \overline{mn - me + ne}^2}{c^2 \cdot mn \cdot \overline{mn - 2me + 2ne}} \cdot y^2 = \frac{mn - me + ne}{mn - 2me + 2ne} \cdot 2cx + x^2.$$

Dalla quale si raccoglie, che il rett. TOt è al quadrato OE, come il lato transverso Tt al parametro $\frac{2TF \cdot KW}{TK}$. S'à da avvertire, che nella Iperbola la formola del semidiametro conjugato $\frac{e\sqrt{mn}}{\sqrt{2me-2ne-mn}}$ diventa immaginaria. Ma per una certa analogia coll'Elisse, l'abscissa CS $= \frac{c\sqrt{mn}}{\sqrt{mn-2me+2ne}}$ chiameremo il semidiametro conjugato, del cui quadrato il quadrato del pro semidiametro sarà come il rettang. TOt al quadrato OE.

Prop. VI

Determinare le equazioni delle Sezzioni Coniche, quando le abscisse prese nel primo, o nel secondo diametro cominciano nel centro, o si prendono nel principio del secondo diametro. Fig.^a 11.^a 12.^a 13.^a

Questa proposizione non riguarda la Parabola perchè in questa curva il centro, e l'altro diametro sono a una infinita distanza.

Per l'Elisse si faccia CO $= z$, sicchè sia Fig.^a 11^a

$\frac{c\cdot\overline{mn-me+ne}}{2me-2ne-mn} - z = x = TO$, e

$\frac{c\cdot\overline{mn-me+ne}}{2me-2ne-mn} + z = tO$: Dunque il rettang.

$TOt = \frac{c^2\cdot\overline{mn-me+ne}^2}{\overline{2me-2ne-mn}^2} - z^2$: ma questo rettang. è al quadrato OE, come il diametro Tt al suo parametro: Dunque sarà

$\frac{c^2\cdot\overline{mn-me+ne}^2}{\overline{2me-2ne-mn}^2} - z^2 : y^2 :: \frac{2c\cdot\overline{mn-me+ne}}{2me-2ne-mn} : \frac{2e^2 mn}{c\cdot\overline{mn-me+ne}}$,

ovvero come $\frac{c^2 \cdot \overline{mn-me+ne}^2}{\overline{2me-2ne-mn}^2} : \frac{e^2 mn}{2me-2ne-mn}$: dalla quale analogia ne siegue, che la differenza dei quadrati CT, CO stà al quadrato OE, come il diametro Tt al suo parametro, oppure come il quadrato del semidiametro TC al quadrato del semidiametro conjugato CS

Poichè è libero il considerare Ss come primo diametro, se in esso si prendano le abscisse o nel vertice, o nel centro del diametro, valeranno affatto le stesse cose. Che se si desidera avere l'espressione del parametro di questo diametro, facilmente otterrassi, se si considererà, che un tal parametro è la terza proporz. dopo Ss, Tt, e troverassi essere il suo valore

$$\frac{2c^2 \cdot \overline{mn-me+ne}^2}{e\sqrt{mn} \times \overline{2me-2ne-mn}^{\frac{3}{2}}}.$$

Per ciò che spetta all'Iperbola facciasi CO=z, Fig.a 13.a
sicchè sia $z - \frac{c \cdot \overline{mn-me+ne}}{mn-2me+2ne} = x = TO$, e

$z + \frac{c \cdot \overline{mn-me+ne}}{mn-2me+2ne} = tO$: Dunque il rett.

TOt $= z^2 - \frac{c^2 \cdot \overline{mn-me+ne}^2}{\overline{mn-2me+2ne}^2}$: mà questo rettang. stà al quadrato OE, come il diametro Tt al suo parametro: Dunque sarà

$$z^2 - \frac{c^2 \cdot \overline{mn-me+ne}^2}{\overline{mn-2me+2ne}^2} : y^2 :: \frac{2c \cdot \overline{mn-me+ne}}{mn-2me+2ne} : \frac{2e^2 mn}{c \cdot \overline{mn-me+ne}}$$

ò come $\frac{c^2 \cdot \overline{mn-me+ne}^2}{mn-2me+2ne} : \frac{e^2 mn}{mn-2me+2ne}$; dalle quali analogie si può raccogliere, che la differenza dei quadrati CO, CT stà al quadrato OE, come il

primo diametro Tt al suo parametro, o come il quadrato del primo semidiametro TC al quadrato del semidiametro conjugato CS.

Mà per trovar l'equazione riferita al 2.° diametro, la quale cioè abbia le absciße nel sec.do diametro, e le ordinate parallele al primo diametro, dal punto E si conduca EX parallella al pr.o diametro TC, sarà $CX = OE = y$, la quale si considererà come abscissa, et $XE = CO = z$, la quale si considererà come ordinata. Quindi risolvasi la precedente analogia in questa equazione

$$\frac{2e^2mnz^2}{c\cdot\overline{mn-me+ne}} - \frac{2ce^2mn\cdot\overline{mn-me+ne}}{\overline{mn-2me+2ne}^2} = \frac{2c\cdot\overline{mn-me+ne}\cdot y^2}{mn-2me+2ne},$$

la quale divisa per 2, ed opportunamente trasferiti i termini darà

$$\frac{e^2mnz^2}{c\cdot\overline{mn-me+ne}} = \frac{c\cdot\overline{mn-me+ne}}{mn-2me+2ne} \times \frac{e^2mn}{mn-2me+2ne} + y^2.$$

Convertasi in analogia a questo modo

$$\frac{e^2mn}{mn-2me+2ne} + y^2 : z^2 :: \frac{e^2mn}{mn-2me+2ne} : \frac{c^2\cdot\overline{mn-me+ne}^2}{\overline{mn-2me+2ne}^2}$$

ovvero

$$\frac{e^2mn}{mn-2me+2ne} + y^2 : z^2 :: \frac{2e\sqrt{mn}}{\sqrt{mn-2me+2ne}} : \frac{2c^2\cdot\overline{mn-me+ne}^2}{e\sqrt{mn}\cdot\overline{mn-2me+2ne}^{\frac{3}{2}}}$$

La prima di queste analogie indica, che il quadrato del sec.do semidiametro CS insieme col quadrato dell' abscissa CX è al quadrato dell' ordinata XE, come il quadrato del semidiametro sec.do CS al quadrato del semid.o pr.o CT, ovvero, come indica la sec.da, siccome il diametro Ss alla quantità $\frac{2c^2\cdot\overline{mn-me+ne}^2}{e\sqrt{mn}\cdot\overline{mn-2me+2ne}^{\frac{3}{2}}}$, la quale si

chiamerà il parametro, o il lato retto del secondo diametro.

Scolio primo. Se si immagini, che la retta FWB Fig.ª 11.ª 12.ª 13.ª si mova intorno al fuoco F, fino che divenga parallela alla direttrice, è evidente, che coinciderà il diametro CFH coll'asse CVA. Perlochè l'equazione al diametro in questa ipotesi, è necessario che passi nella equazione all'asse. Il che potrà intendersi facilmente, se si introducano nella equazione i valori opportuni. Imperochè diviene FH = c = a, FI = e = b BW = m diventa infinita, e perciò WF = n rispetto ad m sarà minore di qualunque data, o nulla; ma sarà ancora

$a : b :: a+b : n$. Dunque $n = b + \frac{b^2}{a}$. Per esempio introdurrò questi valori nell' equazione, che segue,

$$\frac{2cx \cdot \overline{mn-me+ne}}{2me-2ne-mn} - x^2 = \frac{c^2y^2}{e^2} \cdot \frac{\overline{mn-me+ne}^2}{mn \cdot \overline{2me-2ne-mn}},$$

la quale è nella proposizione.

Primieramente, poichè m è infinita, sarà $m-n=m$. Dunque l'equazione sarà

$$\frac{2cx \cdot \overline{mn-me}}{2me-mn} - x^2 = \frac{c^2y^2 \cdot \overline{mn-me}^2}{e^2 \cdot mn \cdot \overline{2me-mn}}, \text{ oppure}$$

$$\frac{2cx \cdot \overline{n-e}}{2e-n} - x^2 = \frac{c^2y^2}{e^2} \cdot \frac{\overline{n-e}^2}{n \cdot \overline{2e-n}}.$$ Introducansi in questa equazione i valori a, b, $b+\frac{b^2}{a} = n$. ed otterrassi

$$\frac{2abx}{a-b} - x^2 = \frac{a^2y^2}{\overline{a+b} \cdot \overline{a-b}},$$ la quale è la medesima colla equazione, che abbiamo ritrovato nella 3.ª proposizione.

Scolio 2.° Le equazioni che si riferiscono ai diametri in ciascuna delle sezzioni coniche, non sono punto differenti da quelle, che appartengono agli assi. Imperciochè se per le specie c, f si intendano i diametri, e per p il parametro, sarà l'equazione

Alla Parabola $px = y^2$

All'Elisse $2cx - x^2 : y^2 :: c^2 : f^2 :: 2c : p$, le x cominciano nel vertice del diametro 2c, il cui parametro è p, e il semidiametro conjugato f.

Alla Elisse $c^2 - x^2 : y^2 :: c^2 : f^2 :: 2c : p$, le abscisse cominciano nel centro, e si prendono nel diametro 2c, il cui parametro è p, e il semidiametro conjugato f.

Alla Iperbola $2cx + x^2 : y^2 :: c^2 : f^2 :: 2c : p$. 2c è il primo diametro, 2f il secondo, p è il parametro del primo diametro, le x cominciano nel vertice del primo diametro.

Alla Iperbola $x^2 - c^2 : y^2 :: c^2 : f^2 :: 2c : p$ le x cominciano nel centro, e si prendono nel primo diametro; il resto come sopra

Alla Iperbola $f^2 + x^2 : y^2 :: f^2 : c^2 :: 2f : p$ le abscisse cominciano nel centro, si prendono nel secondo diametro: 2c è il primo diametro conjugato al secondo 2f; p è il parametro del secondo diametro.

54

Prop. VII

Se tagliandosi due linee Vu, Tt ad angoli retti nel punto C, la linea EMN si mova in maniera, che i punti M, N non si scostino mai dalle medesime rette, dico, che dal punto E sarà descritta un'Elisse. Fig.a 20.a

Vale ancora la prop. in qualunque angolo si taglino Vu, Tt: veggansi i nostri problemi.

La linea curva descritta dal punto E sia TEVt: dipoi si concepisca la EMN moversi in guisa, che coincida colla VC, il punto N caderà in C. ma se si mova fino che coincida colla TC, il punto M caderà in C. Dunque sarà $EN = VC$, $EM = TC$. Sia perciò $EN = VC = c$, $EM = TC = f$. Finalmente dal punto E si conducano E2O, EO perpendicolari a CV, CT e si chiamino $C2O = EO = x$, $CO = E2O = y$. Questo posto, sarà

$EM : EN :: OC : ON$, o analiticamente

$$f : c :: y : \frac{cy}{f} = ON : \text{Ma}$$

$$EN^2 = OE^2 + ON^2 : \text{Dunque}$$

$$c^2 = x^2 + \frac{c^2y^2}{f^2} \text{, ovvero}$$

$c^2 - x^2 : y^2 :: c^2 : f^2$. la quale equazione è dell'Elisse il cui semiasse primo $= c$, il semiasse secondo $= f$.

Scolio. Da questa proposizione si intende,

come siasi formato quello strumento, che commu- nemente chiamasi il Compasso dell' Elisse. Fig.ª 21.ª

Prop. VIII

20.ª

In ogni Sezzione, il cui centro C, e di cui il diametro qualunque è AB, al quale sia ordinata la DE, se si conduca una tangente al punto D, ella taglierà il diametro in T in maniera, che starà EC : EB :: EA : ET Fig.ª 22,ª 23,ª 24.ª

Per il punto D conducasi una qualunque secante TDd, la quale concorra colla sezzione nei punti D, d, dai quali cadano nel diametro le ordinate DE, de; indi si tiri DG paralella al diametro fino che. sono finite le linee Ee, DG, dG, la retta TDd sarà secante. Ma se queste svaniscono, e diventano = 0, allora TD di secante si fà tangente, come è manifesto dal cap. 1.º Chiamisi perciò AE = x, DE = y, Ee = DG = e, dG = g, AC = c. Il semidiametro conjugato = f. E' evidente, che dalle equazione della sezzione si hanno queste analogie

$2cx - x^2 : y^2 :: c^2 : f^2$

$2cx + 2ce - x^2 - 2xe - e^2 : y^2 + 2gy + g^2 :: c^2 : f^2$.

Dunque dividendo sarà

$2ce - 2xe - e^2 : 2gy + g^2 :: c^2 : f^2$: ma se si chiama ET = t, la similitudine dei triangoli dà questa proporzione

TE : ED :: DG : dG, ovvero

$t : y :: e : \frac{ey}{t}$: Dunque $g = \frac{ey}{t}$, il

qual valore sostituito nell'ultima formula, si averà

$2ce - 2xe - e^2 : \frac{2y^2e}{t} + \frac{y^2e^2}{t^2} :: c^2 : f^2$, e fatta la divisione per e,

$2c - 2x - e : \frac{2y^2}{t} + \frac{y^2e}{t^2} :: c^2 : f^2$: da questa equazione per aver la tangente, bisogna far $e = 0$: sarà dunque

$2c - 2x : \frac{2y^2}{t} :: c^2 : f^2$. Dunque compiute le operazioni, diviene

$t = \frac{c^2y^2}{f^2 \, c - x}$: mà $\frac{c^2y^2}{f^2} = 2cx - x^2$ per l'equazione della sezione.

Dunque $t = \frac{2cx - x^2}{c - x}$, ovvero

$c - x : 2c - x :: x : t$, la quale proporzione espressa in linee dà

$EC : EB :: AE : ET$.

Corol. 1°. Da quest'ultima analogia dividendo si raccoglie, che stà

$EC : CB = CA :: AE : AT$.

Corol. 2°. Posta la superiore analogia, sarà alternando

$EC : AE :: CA : AT$, e componendo

$EC : CA :: CA : CT$. Le analogie dell'uno e dell'altro Corollario somministrano nuovi ed eleganti metodi per condurre le tangenti delle Sezioni Coniche.

Determinazioni.

Le cose esposte nella proposizione convengono immediatamente all'Elisse. Questo solamente è da avvertirsi. Se l'ordinata DE taglierà il diametro tra i punti A, C, la tangente taglierà il diametro fuori de' punti C, A. Ma se l'ordinata cadesse nel centro C, la tangente si farebbe paralella al diametro. Imperciocchè dovendo stare per il Corol. 3° $CE : CA :: CA : CT$, e in questa ipotesi essendo $CE = 0$, sarà CT infinita. Dunque la tangente e il diametro, che si diriggono al punto T infinitamente lontano, diventano paralelle. Ma se l'ordinata taglierà il diametro fra i punti C, B, come in e, allora il diametro sarà tagliato dalla tangente fuori de' punti C, B; poichè essendo negativa la CE richiede ancora, che sia negativa la retta intercetta tra la tangente e l'ordinata. Fig.ª 22.ª

Quanto alla Iperbola troveransi ogni cosa collo stesso metodo, se serviràssi della sua equazione. Ma l'analogia del 2° Corollario si raccoglie non componendo, ma dividendo. Intendasi ciò che ne siegue da questa analogia. Qualunque tangente taglierà il diametro fra il centro C, e il vertice del diametro A. Poichè essendo CE, CA, CT in proporzione continua, non sarà mai $CT = 0$, se la tangente non diriggesi a un punto infinitamente lontano, nella quale supposizione coinciderà la tangente coll'assintoto. Fig.ª 23.ª

Retta, che diciamo della Parabola. Nella analogia del primo corol. $EC : AC :: AE : AT$, essendo il punto C infinitamente distante, sarà $EC = AC$: Dunque $AE = AT$, o TE dupla di AE: il che pure darà il metodo della proposizione, servendosi dell'equazione alla Parabola. Fig.a 24.a

CAP. IV

Si spiegano più diffusamente alcune cose dei diametri conjugati, e intorno agli Assintoti delle Iperbole.

Con diverso metodo caveremo le proprietà dei diametri conjugati nell'Elisse, che nell'Iperbola, poichè i secondi diametri nell'Elisse tagliano la curva non così nella Iperbola, devesi affatto procedere per diverse strade. Sia dunque in primo luogo dell'Elisse la

Prop. I

Sia qualunque semidiametro CA, e due altri semidiametri conjugati CD, CK, e dai punti D, K siano ordinate al diametro CA le rette DO, KE, dico, che il quadrato CA è eguale ai due quadrati CO, CE. Fig.a 25

Dim.o Dal punto D si conduca DM tangente dell'Elisse, che concorra con CA in M. Si chiami $CA = a$, $CO = x$. Dunque per la proprietà della tangente $CM = \frac{a^2}{x}$, ed $OM = \frac{a^2 - x^2}{x}$. Di più sia $OD = y$, $CE = z$, $EK = u$. Poichè la tangente DM è parallela al diametro CK, sa-

ranno simili i due triangoli DCM, CEK: Dunque sarà

$DO : KE :: OM : CE$, ovvero analiticamente.

$y : u :: \frac{a^2-x^2}{x} : z$: mà per la proprietà della sezzione

$DO^2 : KE^2 :: AOa :: AEa$, o per anilisi

$y^2 : u^2 :: a^2-x^2 : a^2-z^2$, e cavando la radice.

$y : u :: \sqrt{a^2-x^2} : \sqrt{a^2-z^2}$: dunque per l'equalità delle ragioni

$\sqrt{a^2-x^2} : \sqrt{a^2-z^2} :: \frac{a^2-x^2}{x} : z$, che fa essere

$zx = \sqrt{a^2-x^2} . \sqrt{a^2-z^2}$, o elevando al quadrato

$z^2x^2 = a^4 - a^2x^2 - a^2z^2 + z^2x^2$, la quale equazione spurgata dà

$z^2 + x^2 = a^2$, ovvero $CO^2 + CE^2 = CA^2$

Se CB sarà semidiametro conjugato di CA, e si faccia $CB = b$, collo stesso raziocinio dimostreràssi $y^2 + u^2 = b^2$, ovvero $CV^2 + CT^2 = CB^2$.

Corol. 1.° Poichè è $x^2 + z^2 = a^2$, sarà $x^2 = a^2 - z^2$ o pure $CO^2 = AEa$ rettang. Parimente $z^2 = a^2 - x^2$, o pure $CE^2 = AOa$ rettang. Quello che vale del diametro CA, devesi ancora intendere del suo conjugato CB.

Corol. 2.° Siano CA, CB gli assi. Congiungansi le due equazioni $z^2 + x^2 = a^2$, e $y^2 + u^2 = b^2$, e si averà

$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = a^2 + b^2$: mà $x^2 + y^2 = CD^2$,

$z^2 + u^2 = CK^2$: Dunque $CD^2 + CK^2 = a^2 + b^2 =$

$CA^2 + CB^2$. Perlochè i due quadrati dei diametri conjugati sempre sono eguali ai quadrati degli assi, e perciò i due quadrati di due diametri conjugati s'aggvagliano sempre ai due quadrati di due altri diametri conjugati.

Corol. 3.° Siano CA, CB qualunque diametri, sarà

$CE : CO :: OD : EK$. Imperciochè

$y : w :: \sqrt{a^2 - x^2} : \sqrt{a^2 - z^2}$ per le cose dimostrate nel I.° coro.° ~~nella proposizione~~. Mà

$\sqrt{a^2 - x^2} = z$, e $\sqrt{a^2 - z^2} = x$ per il Corol. 1.° Dunque

$z : x :: y : w$, cioè $CE : CO :: DO : EK$.

Onde i triangoli CEK, COD, o i parallelogrammi VE, OT sono eguali trà di loro.

Corol. 4.° Prodotta la tangente fino che concorra coi diametri in M, N, dico, che il diametro conjugato CK è mezzo proporzionale trà DM, e DN. Per la simiitudine dei triangoli DMO, CKE, sarà $DM : CK :: DO : KE$. e per i triangoli simili KCE, DNT

$CK : ND :: CE : TD = CO$: mà per il Corol. 3.°

$DO : KE :: CE : CO$: dunque per l'egualità della ragione

$DM : CK :: CK : ND$.

Corol. 5.° Siano CA, CB gli assi, e dal centro C si conduca CP normale alla tangente, dico, che il rettang. PCK è eguale al rettang. BCA. Per la similitudine dei triang. TDN, NPC aven=

ti gli angoli retti in T, P, e l'angolo N commune, ovvero CO : CP :: DN : NC : e per i triangoli simili CPM, DOM

MC : CP :: DM : DO = CT. Dunque componendo le ragioni

MCO : CP² :: MDN : TCN. Ma MCO = CA²

ed MDN = CK², e TCN = CB². Dunque

CA² : CP² :: CK² : CB², e cavando la radice

CA : CP :: CK : CB. Dunque

CA . CB = CP . CK.

Questa stessa dimostrazione valerebbe se CA, CB fossero due qualunque diametri; e si conducessero due linee CP, Cp che facessero gli angoli CPN, CpM eguali ad ACB: imperciochè essendo queste linee CP, Cp eguali tra di loro, collo stesso metodo si dimostra, che il parallelogrammo BCA nell' angolo BCA è eguale al parallelogrammo PCK nello stesso angolo BCA, o PCK. ✗

✗ Leggi l'annotazione alla figura della proposizione.

Corol. 6° Laonde se alle estremità dei due diametri conjugati si circoscriva un parallellogrammo all' Elisse, i cui lati siano paralelli ai diametri conjugati, questo sempre sarà eguale al rettang. circoscritto, i cui lati siano paralelli agli assi, e perciò tutti questi parallelogrammi circoscritti sono eguali fra di loro.

Prop. II

Se costituita l'Iperbola trà gli assintoti CE, Ce, che abbia il centro C, il diametro Uu, la direttrice Ah, il vertice V, si conduca per il vertice della Sezzione la linea CVK, che divida l'angolo C egualmente, e tagli la direttrice ad angoli retti, indi per lo stesso vertice V si tiri la retta DVd paralella alla direttrice e tangente della sezzione nel punto V: dico, che la retta Dd è eguale all'asse secondo. In oltre se si conduca alla Dd paralella qualunque EFe, dico, che il rettangolo EFe è eguale al quadrato DV, ovvero al rettangolo DVd. Fig.a 26.a

Dim.o Primieramente è chiaro, che le linee Ah, Dd, Ff, Ee sono divise egualmente. Indi CA : CV :: HA : DV, o coll'analisi

$\frac{a^2}{b-a} : \frac{ab}{b-a} :: \frac{a\sqrt{a+b}}{\sqrt{b-a}} : DV = \frac{b\sqrt{a+b}}{\sqrt{b-a}}$, il quale essendo il valore del semiasse secondo, è manifesto, che DV s'agguaglia al semiasse secondo.

Quanto all'altra parte della proposizione chiamisi $VK = x$, $FK = y$, $EF = u$. Poichè stà CV : CK :: DV : EK, sarà nelle specie analitiche

$\frac{ab}{b-a} : \frac{ab}{b-a} + x :: \frac{b\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}} : u + y$; ed elevando al quadr.

$\frac{a^2b^2}{\overline{b-a}^2} : \frac{a^2b^2}{\overline{b-a}^2} + \frac{2abx}{b-a} + x^2 :: \frac{b^2 . \overline{a+b}}{b-a} : u^2 + 2uy + y^2$.

Mà dall'equazione della curva hassi questa analogia

[A] $\frac{a^2b^2}{\overline{b-a}^2} : \frac{2abx}{b-a} + x^2 :: \frac{b^2 . \overline{a+b}}{b-a} : y^2$.

Dunque per l'equalità delle ragioni

$$\frac{a^2b^2}{b-a^2}+\frac{2abx}{b-a}+x^2:\frac{2abx}{b-a}+x^2::u^2+2uy+y^2:y^2.$$

e dividendo

$$\frac{a^2b^2}{b-a^2}:\frac{2abx}{b-a}+x^2::u^2+2uy:y^2,$$ la quale analogia paragonata con quella, a cui è prefisso il segno A dà similmente

$$\frac{b^2.\overline{a+b}}{b-a}:y^2::u^2+2uy:y^2.$$ Dunque

$$\frac{b^2.\overline{a+b}}{b-a}=u^2+2uy,$$ cioè il quadrato DV è eguale al rettang. EFe. Come dovea dimostrarsi.

Corol. Nella Iperbola equilatera, in cui il primo, e 'l secondo asse sono eguali è DV = VC = Vd: Dunque il cerchio descritto col centro V, e col raggio VD, passerà per i punti D, C, d. Dunque l'angolo DCd sarà nel semicircolo, e perciò retto.

Prop. III

Se all'opposto ramo dell'Iperbola si conduca FGI parallella ad VA, e secante gli assintoti in G, g, sarà il rettang. gFG eguale al quadrato del semiasse primo, ovvero al rettang. VCω. Fig.ª 20.ª

Dim.º I triangoli CVd, gFe sono simili: Dunque

CV : Vd :: gF : Fe. Parimente sono simili CVD, GFE: Dunque

$CU : UD :: GF : FE$: e perciò componendo le ragioni $CU^2 : UD^2 :: gFG : EFe$: ma per la precedente $UD^2 = EFe$: Dunque $CU^2 = gFG$.

Corol. Nella Iperbola equilatera, in cui $CU = UD$, sarà $gFG = EFe$.

Prop. IV

Trà gli Assintoti CH, Ch si intenda condotta qualunque Dd, che tocchi l'Iperbola nel punto T, a cui sia parallella qualunque HFh, dico, che il rettang. HFh è eguale al rettang. DTd Fig.a 27.a

Dim.o Dai punti F, T si tirino EFe, BTb, che taglino in porzioni eguali gli assintoti, Cioè $CB = Cb$, $CE = Ce$. Si è dimostrato nella prop. 2.a, che il rettang. $EFe = BTb$: Dunque $EF : BT :: Tb : Fe$: ma per la similitudine dei triang. BDT, EHF,
$EF : BT :: FH : TD$; e per i triang. simili Tbd, Feh
$Tb : Fe :: Td : Fh$: dunque ancora
$FH : TD :: Td : Fh$, ovvero il rettangolo
$HFh = DTd$. Come dovea dimostrarsi.

Corol. 1.o Poichè tanto il rettang. HFh, quanto il rettang. $H\varphi h$ è eguale al rettang. DTd, sarà $HFh = H\varphi h$: Dunque starà
$HF : H\varphi :: \varphi h : Fh$, e dividendo
$HF : F\varphi :: \varphi h : \varphi F$; e perciò $HF = \varphi h$.

Onde bisogna, che sia ancora $DT = TD$.

Corol. 2°. Condotto il semidiametro CTO, dico, che DT s'agguaglia al semidiametro conjugato. Dim.° Si chiami $AF = u$, $FO = y$, $TO = x$, $CT = c$, il semidiametro conjugato $= f$, $DT = q$. Queste così denominate troveremo queste trè equazioni

[A] $u^2 + 2uy = q^2$

[B] $2cx + x^2 : y^2 :: c^2 : f^2$.

[C] $c : c + x :: q : u + y$. L'equazione A si raccoglie dalla proposizione, B dalla proprietà dei diametri, C finalmente dalla similitudine dei triang. CTD, COA. L'analogia C si innalzi al quadrato

$c^2 : c^2 + 2cx + x^2 :: q^2 : u^2 + 2uy + y^2$, nella quale in vece dei termini $u^2 + 2uy$ introducasi q^2 che si hà dalla prima equazione, e sarà

$c^2 : c^2 + 2cx + x^2 :: q^2 : q^2 + y^2$, e dividendo, indi permutando

$c^2 : q^2 :: 2cx + x^2 : y^2$, la quale paragonata coll'equazione B, dà per l'egualità delle ragioni $c^2 : q^2 :: c^2 : f^2$. Dunque $q = f$, cioè DT eguale al semid. conjugato. Come dovea dim.si

Prop. V

Se da un qualunque punto F della curva all'opposto ramo della Iperbola si conduca Fq, che tagli gli assintoti in A, h, a cui dal centro Fig.a 28.a

si tiri parallelo il diametro CT, dico, che il rettang. hFH è eguale al quadrato CT.

Dim.° Dai punti F, T si tirino Fg, Tb parallele, che taglino negli assintoti porzioni eguali $CG = Cg$, $CB = Cb$. Per la terza prop.e il rettang.° $gFG = bTB$: Dunque stà $gF : BT :: BT : GF$: ma per i triang. sim. gFh, BTC $gF : BT :: Fh : CT$; e per i triang. sim. BTC, GFH, $BT : GF :: CT : FH$: Dunque per l'egualità delle rag.i $Fh : CT :: CT : FH$; e perciò il rettang. $hFH = CT^2$.

Corol. Poichè il rettang. $hFH = CT^2$, ed $H\varphi h = Ct^2$, ed è noto, che $CT = Ct$: Dunque $hFH = H\varphi h$: Dunque
$hF : \varphi h :: H\varphi : HF$, e componendo
$\varphi F : \varphi h :: \varphi F : HF$: e perciò $\varphi h = HF$.

Prop. VI

Trovare l'equazione all'Iperbola riferita agli assintoti, quando le ordinate a un qualche diametro sono parallele al suo coniugato. Fig.a 27.a

S'hanno a distinguere tre casi, quando le abscisse dell'Iperbola si prendono nell'assintoto: il primo, allorchè le ordinate sono costituite in maniera, che ad esse si può condur parallelo il secdo diametro, di poi, quando alle ordinate si può condur parallelo il primo diametro; finalmente, quando all'altro assintoto son parallele. Noi consideremo il caso primo in questa proposizione, gli altri nelle seguenti.

Giacente l'Iperbola tra gli assintoti CE, Ce, in uno di questi assintoti si prendano le abscisse CH, e le ordinate HF, a cui si può tirar parallello il secdo diametro. Conducasi la tangente DTd parallella ad esse ordinate, la quale è eguale al secdo diametro. Si denomini $CD = a$, $DT = f$, $CH = x$, $HF = y$, e si produca HF in h, dove taglia l'altro assintoto, sarà

$CD : Dd :: CH : Hh$, o analiticamente

$a : 2f :: x : \frac{2fx}{a}$; e perciò $Hh = \frac{2fx}{a}$:

Dunque $Fh = \frac{2fx}{a} - y$: ma per le antecedenti il rettang. $HFh = DT^2$: Dunque

$\overline{\frac{2fx}{a} - y} \cdot y = f^2$; ovvero $\frac{2fxy}{a} - y^2 = f^2$.

Corol. Se come cognite si prendano CM, MN, Nm, che si chiamino g, h, K, è chiaro che $f^2 = hK$, e che stà

$2f : a :: h+K : g$: Dunque sostituiti nella equazione questi valori, si farà

$\frac{h+K}{g} \cdot xy - y^2 = hK$, la qual formula è alquanto più universale della precedente.

Prop. VII

Trovare l'equazione della Iperbola riferita all'assintoto, allorche le ordinate si prendono parallelle a un qualche primo diametro. Fig.a 28.a

Siano le abscisse $CH = x$, le ordinate $HF = y$. Si produca HF, fino che concorra

coll' altro assintoto in h, a cui sia parallello il primo diametro CT concorrente colla sezzione nei punti T, t, dai quali si conducano e tangenti concorrenti cogli assintoti nei punti D, d, cioè TD, td, le quali saranno eguali, e parallelle., e si congiunga Dd eguale e parallella a Tt. Si chiami $CD=a$ $CT=c$, onde $Dd=2c$. È manifesto, che stà
$CD : Dd :: CH : Hh$, o analiticamente
$a : 2c :: x : Hh = \frac{2cx}{a}$: Dunque
$hF = \frac{2cx}{a} + y$; ma per le cose dimostrate
$hFH = CT^2$: Dunque $\frac{2cxy}{a} + y^2 = c^2$, che è l'equazione cercata.

Corol. Se come cognite si prendano CM, MN, mN, le quali si chiamino g, h, k, è evidente essere $c^2 = hk$. Così
$2c : a :: k-h : g$; i quali valori sostituiti nella equazione, ella diviene $\frac{k-h}{g}xy + y^2 = hk$, che è una equazione più universale.

Prop. VIII

Trovare l'equazione all'Iperbola, allorchè le ordinate a un'assintoto, sono parallelle all'altro assintoto. Fig.ª 29.ª

Sia costituita l'Iperbola fra gli Assintoti CE, Ce, e dal punto costante V, e variabile F si conducano VB, FD parallelle all'assintoto Ce. Per il punto V si tiri HVh tangente dell'Iperbola in V, e ad essa per il pun=

to F la parallella eFE. Dalle cose dimostrate
$EF : HV :: Vh : Fe$, ovvero prodotta VB in g
$ge : Fe :: CB : CD$: Dunque
$DF : BV :: CB : CD$; Perciò se si chiama
$FD = y$, $VB = b$, $CB = a$, $CD = x$, sarà
$ab = xy$. Che è l'equazione cercata

Corol. Poichè l'iperbola equilatera hà gli assintoti concorrenti ad angolo retto, perciò l'equazione $ab = xy$, in cui le coordinate fanno angoli retti è all'iperbola equilatera.

Prop. IX

Quella parte d'assintoto che viene intercetta tra la tangente dell'iperbola, e il centro vien divisa per mezzo dall'ordinata parallella all'altro assintoto. Fig.ª 30.ª

La MT tocchi l'Iperbola, e tagli l'assintoto in M. Da T si conduca TN parallella all'altro assintoto hC, dico che MC è divisa per mezzo in N. Imperciochè si produca MT in m: è stato dimostrato essere $MT = mT$: Dunque ancora $MN = CN$.

Prop. X

Condotte due tangenti MTm, AVh, dico che i triang. CMm, CAh sono equali. Fig.ª 30.ª

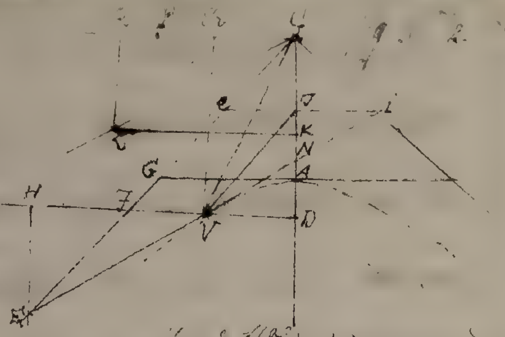
Dim.° Si tirino TN, VK parallelle all'assintoto Ch, e si congiungano CT, CV. È stato dimostrato nella prop. 8.ª stare
$CN : CK :: KV : NT$: Dunque i triang. CNT,

GKU aventi gli angoli eguali in K, N sono eguali: ma questi sono le quarte parti dei triang. GMm, GHh: Dunque ancora GMm, GHh sono eguali tra di loro. Come dovea dim.^si

Corol. Quindi prodotto il primo diametro UG in u, e tirata la tangente Lul, e congiunte LH, lh, si verrà a formare un parallelogrammo, i cui diametri si intersecaranno in G: e perciò questo parallelogrammo sarà quadruplo del triang. GHh. Laonde tutti i parallelogrammi similmente formati saranno eguali tra di loro. E questi parallelogrammi vengono fatti dai due diametri nello stesso angolo, nel quale si interse=cano i diametri. Questa stessa proprietà s'è dimostrato nel Corol. ultimo della pra prop.^e appartenere ancora alle Elisse.

Proposizione I ... X ...

IV ~~Le sezioni~~ coniche.



Sia nell'iperbola qualunque semidiam.° CA, e due altri semidiam.ⁱ conjugati CV, CZ; e dai punti V, Z siano ordinate al diam.° CA le rette VD, ZK, dico che il quadrato di CA è eguale alla diff.ᵃ de' due quadrati CD, CK.

Dim.ᵉ Dal punto V si tiri la tangente all'iperbola EVNI, che tagli il semidiam.° CA nel punto N, indi presa VE = VI = CZ, si conduciano le rette indefinite CE, CI, che saranno gli assintoti dell'iperbola. Pel punto A si tiri la tangente AS, che tagli l'assintoto in S, questa sarà eguale al semidiam.° conjugato di CA. Di più si conducano i ... HFVD parallele a SA, e il punto F sia determinato dalla CH, ... dal punto E si tira parallela a CA. Finalmente si congiunga VF. Per le parallele FV, EI, poichè EI è doppia di EV, sarà anche ... doppia di ... Inoltre, poichè nel triang.° ... simili ... = ..., ... = ..., sarà ... parallela a ..., dunque ... parimenti doppia di ...; e perciò ... = ...; onde i triangoli EFH, FVD saranno simili ed eguali, ed ... = ...; HF = DV; HV = DF. Si chiami ora CA = a, CD = x. Dunque per la proprietà della tangente $CN = \frac{a^2}{x}$, e $ND = \frac{x^2-a^2}{x}$. Di più sia DV = y, ~~HF~~ EH = CK = z, HV = ZK = u. Per la similitudine de' triangoli ..., HVD, sarà DV : HV = ZK :: DN : CH = ..., cioè analiticamente

$$y : u :: \frac{x^2-a^2}{x} : z .$$

Parimente per la similitudine de' triangoli HEF, CFD, sarà HF = DV : DF = HV = ZK :: ~~...~~ EH = CK : CD, ovvero analiticamente $y : u :: z : x$; onde ... l'egualità delle ragioni sarà DN : CK :: CK : CD, ovvero per analisi

$$\frac{x^2-a^2}{x} : z :: z : x ,$$

da cui risulta

$z^2 = x^2 - a^2$, ovvero $x^2 - z^2 = a^2$, cioè $CD^2 - CK^2 = CA^2$.

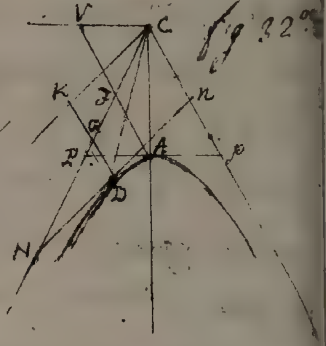
Sopra la indefinita ... ~~...~~ che è la direzione del CP semidiam.° conjugato di CA si tirino VR, ZQ parallele a CA. Chiamata AS = CP = b, per i triangoli simili SAC, VDF, sarà b : a :: y : DF = CH = z, e perciò $z = \frac{ay}{b}$. Ma ...

... si ...

zione dell' iperbola è $x = \frac{a\sqrt{b^2+y^2}}{b}$, sono sostituiti questi valori nella superiore analogia $y : u :: z : x$, sarà $y : u :: \frac{ay}{b} : \frac{a\sqrt{b^2+y^2}}{b}$, da cui nasce $u = \sqrt{b^2+y^2}$, e quadrando $u^2 - y^2 = b^2$, cioè $CQ^2 - CR^2 = CP^2$.

Coroll.^o Siano CA, CP i semiassi. Dall' equazione $CD^2 - CK^2 = CA^2$, si sottragga l'equazione $CQ^2 - CR^2 = CP^2$, e si avrà $CD^2 - CK^2 + CR^2 - CQ^2 = CA^2 - CP^2$. Ma $CD^2 + CR^2 = CV^2$, e $CK^2 + CQ^2 = CZ^2$; dunque $CV^2 - CZ^2 = CA^2 - CP^2$. Perciocchè la differenza de' due quadrati dei diametri conjugati sempre sono eguali alla differenza de' due quadrati degli assi, e perciò la differenza dei due quadrati di due diametri conjugati, si agguagliano sempre alla differenza dei quadrati di due altri diametri conjugati.

Propos. II



Posti due semidiametri conjugati CA, CV nell' iperbola, se si prendano due altri semidiametri conjugati CD, CK qualunque, e si congiungano VA, KD, i triangoli CVA, CKD, cioè i rispettivi semidiametri conjugati saranno eguali.

Dim.^e Al punto D si tiri la tangente dell' iperbola NDn, e presa $DN = Dn = CK$, si tirino per N, n gli assintoti dell' iperbola CN, Cn, e per A si conduca la tangente PAp, che tagli gli assintoti ne' punti P, p, e similmente si congiungano DK, AV. Poichè CK è eguale e parallela a Dn, saranno anche DK, Cn parallele; e similmente, poichè CV, Ap sono eguali e parallele, saranno AV, Cp parallele, e perciò anche AV, DK tra loro parallele. Per la proprietà degli assintoti sarà $CF \times FA = CG \times GD$, e riducendo in analogia $CF : CG :: GD : FA$; dunque i triangoli CFA, CGD aventi i lati circa gli angoli eguali F, G reciprocamente proporzionali, saranno eguali tra loro. E poichè ne' triangoli simili CFZ, NDG sono i lati opposti ad eguali angoli CK, ND eguali, saranno anche KG, GD eguali, e perciò il triangolo KCD doppio di GCD. Così pure ne' triangoli simili DFA, CFV si troverà $VF = FA$, e il triangolo VCA doppio del triang.^o FCA; ma si sono dimostrati eguali i triangoli CGD, CFA, dunque saranno anche eguali CKD, CVA, cioè i triangoli fatti dai rispettivi semidiam.^i conjugati saranno eguali.

CAP. V

Nel quale con alcuni dati si descrivono le Sezzioni Coniche.

Nelle proposizioni 8.ª, 9.ª, e 10.ª del Cap. 1.° abbiamo fatti vedere tre stromenti, coi quali dati i fuochi, e la loro distanza, e la lunghezza del primo asse si delinea l'Elisse e l'Iperbola, e dato il fuoco, e il vertice dell'asse, ovvero la direttrice, si delinea la Parabola. Imperciocchè con due dati si ritrova il terzo, essendo equidistanti dal vertice il fuoco, e la direttrice. Così nello scolio dopo la prop. 7.ª del Cap. 3.° abbiamo accennato un'altro istromento, con cui dati i due assi si descrive l'Elisse, il quale, come abbiamo detto, si suol chiamare il compasso per descrivere l'Elisse. Tra questi due generi di stromenti v'ha questa differenza, che il compasso sudetto è composto di righe, e di norme rigide e ferme, le quali nel moversi non si possono nè arrendere, nè cambiar situazione. Dove se ci serviamo del filo è inevitabile l'incommodo della tensione ora maggiore, ora minore del filo, quando la costruzzione ricerca che egli stia sempre egualmente disteso. Se si adopera una catenella non si descriverà una curva, ma un poligono di

molti lati. Laonde se si vuole una somma esattezza, deve essere preposto agli altri il compasso dell'Elisse. Se però non importa tanta diligenza, per la prattica sarà bastevole il primo genere di istromenti. Perciò io penso doversi dimostrare prima di tutto, in qual modo coi dati d'un istrumento si possano trovare i dati dell'altro, affinchè conosciuta la maniera ciascuno si possa servire di quello, che sarà più acconcio alla sua prattica. Per altro degli stromenti atti a descrivere le curve noi ne tratteremo altrove diffusamente.

Prop. I

Dato il primo asse della Parabola, della Iperbola, o della Elisse, e il suo parametro, ritrovare i fuochi. Fig.ª 1.ª

Per l'Elisse, trà il primo asse Ue, e il suo parametro si trovi la mezza proporzionale, che sarà il secondo asse, il quale si applichi talmente in T, t, che tagli, e sia tagliato per mezzo e perpendicolarmente dal primo asse nel punto C, che è il centro della Sezione. Indi fatto centro in T coll'intervallo CU si descriva un cerchio, che tagli il primo asse nei punti F, f; questi saranno i fuochi dell'Elisse. La dimostrazione dalle cose antidette è manifesta.

Nella Parabola la cosa è più facile. Dal vertice U si prenda nell'asse UF eguale alla quarta parte del parametro: il pun- Fig.ª 2.ª

to F sarà il fuoco della Parabola.

Per l'Iperbola, trà il primo asse Vu, ed il suo parametro si trovi la mezza proporzionale Tt, che si agguaglierà al secondo asse. Questa deve essere posta in modo, che divida, e sia divisa per mezzo, e perpendicolarmente dal primo asse nel punto C, e si prendano $CF = Cf = TV$, i punti F, f saranno i fuochi della Sezione. Fig.^a 3.^a

Dim.^o Si intenda condotta la direttrice DaD che tagli il primo asse in A; e si chiami $AV = a$, $VF = b$, $CV = c$, il cui parametro $= p$. E' chiaro che $c = \frac{ab}{b-a}$, $p = \frac{2b \cdot \overline{a+b}}{a}$: nell'una e nell'altra di queste equazioni si trovi il valore di a, e verrà $a = \frac{bc}{b+c}$, $a = \frac{2b^2}{p-2b}$: dunque

$\frac{bc}{b+c} = \frac{2b^2}{p-2b}$, ovvero $cp - 2cb = 2b^2 + 2bc$, ovvero $\frac{cp}{2} + c^2 = b^2 + 2bc + c^2$; ed estrattane la radice $\sqrt{\frac{cp}{2} + c^2} = b + c$: mà $b + c$ è la distanza del centro dal fuoco, cioè CF; $\sqrt{\frac{cp}{2} + c^2} = TV$, poichè $TV = \sqrt{TC^2 + c^2}$: mà $TC^2 = \frac{cp}{2}$, essendo Tt mezza proporzionale trà il primo asse Vu, e il suo parametro p: Dunque CF deve essere eguale a TV: Dunque, fatta $CF = TV$, F sarà il fuoco. Come dovea dim.^si

Corol. 1.^o Dalle cose dette nella proposizione si deduce il modo, con cui dati i due assi della Elisse, o della Iperbola, si ritrovino i fuochi.

Corol. 2.^o Dato il secondo asse dell'...

Ellisse, o della Iperbola, e il suo parametro, agevolissimamente si ritrova il primo asse, che è mezzo proporzionale tra il secondo asse, e il suo parametro, e quindi si trovano i fuochi.

Corol. 3.° Similmente dati i due fuochi della Ellisse, o della Iperbola, e il primo asse, senza difficoltà si trova l'asse secondo. Imperciocchè divisa per mezzo la distanza dei fuochi F, f in C si conduca alla retta Ff la perpendicolare T&. Indi nella Ellisse fatto centro in F coll'intervallo del semiasse primo si descriva un cerchio, che tagli la T& nei punti T, &, sarà T& l'altro asse; nella Iperbola poi fatto centro in V colla distanza FC si descriva un cerchio, che tagli T& nella perpendicolare condotta, questa sarà l'altro asse. Fig.ª 1.ª 3.ª Fig.ª 1.ª Fig.ª 3.ª

Corol. 4.° Similmente dati i due fuochi, e il secondo asse, facilissimamente si rinviene il primo asse della Iperbola, o della Ellisse. E poichè la costruzione s'appoggia sui medesimi fondamenti, io giudico superfluo il farne più parola.

Scolio. Queste cose dimostrate essendo non può più essere oscuro, come data la posizione dell'asse, e del suo parametro, parimente dato il fuoco, il vertice si possa in un piano delineare una parabola, ed in qual modo dato l'uno de' due assi col suo parametro, o dati i due assi, o dati i due fuochi con l'uno o l'altro asse si descriva l'Ellisse, o l'Iperbola. Laonde, si ricav.

remo tutti i Problemi a questi, che sono già sciolti, per l'avvenire noi otterremo l'intento nostro per la loro soluzione.

Prop. II

Dato il fuoco, il vertice dell'asse, e la direttrice descrivere la Sezzione.

Se il fuoco, e la direttrice siano egualmente distanti dal vertice dell'asse, s'ha da descrivere una Parabola, la quale è chiaro, in che modo vada descritta. Fig. 2.ª

Se sono inegualmente distanti la direttrice DaD, il vertice V, e il fuoco F, congiungasi FVA, che sarà perpend. alla direttrice, indi dopo la differenza trà AV, VF, ed AV trovisi la terza proporzionale AC, e C sarà il centro della Sezzione, e CV il semiasse primo. Prendasi CF = Cf, F, f saranno i fuochi della sezzione. Dunque sono dati i fuochi, e la lunghezza del primo asse; e perciò si descrive la Sezzione, che sarà l'Ellisse, se il vertice V giace trà la direttrice, e il centro C, sarà l'Iperbola, se la direttrice è posta trà il vertice V, e il centro C. Fig.ª 1.ª 3.ª

Definizione. Si dice essere data la specie della sezzione, quando è data la proporzione trà le linee AV, VF; la quale data, essendo le trè linee CF, CV, AC in proporzione continua sarà ancora data la proporzione di tutte queste linee, e delle loro parti. Perlochè il triangolo Fig.ª 1.ª 2.ª 3.ª

rettangolo TFC nella Ellisse, in cui TF = VC, ed FC sono in proporzion data, sarà in specie dato, ed inoltre data la proporzione TF : TC, ovvero la ragione degli assi: E nell' Iperbola il triangolo rettangolo TVC, nel quale è data la ragione tra TV = CF, e CV, sarà in specie dato: Dunque sarà data la proporzione tra TC, ed VC, ovvero frà il secondo, e il primo asse. Tutte queste proporzioni sono state ritrovate nei Capi antecedenti. Perciò data una di queste ragioni, sarà parimente data la specie della sezzione. Fig.ª 1.ª

Corol. 1.° Dati due di questi tre, fuoco, vertice dell' asse, e direttrice, e la specie della sezzione, descrivesi la sezzione. Imperochè dalla specie della sezzione facilmente si trova il terzo incognito dei tre suddetti. Mà queste cose sono assai facili, e dalle cose antidette si deducono senza fatica, siccome ancora ogni caso consimile. Passiamo a cose più malagevoli.

Corol. 2.° Così manifestamente appare, che due curve della stessa specie sono simili trà se, che soverchia cosa farei, s'io procurassi di metterlo in chiaro con più parole.

Prop. III

Trà gli Assintoti CE, Ce descrivere una Iperbola, che passi per un punto dato F. Fig.ª 20.ª

Si divida per mezzo l'angolo ECe colla linea CK, e per il punto F si conduca la linea EFe perpendicolare a CK. Trà EF, ed Fe si trovi la mezza proporzionale, che si adatti tal-

mente in DU, che, posta tra le linee CE, CK sia parallela alla linea Ee: dico, che l'Iperbo=la descritta col vertice U, centro C, coi semiassi CU primo, DU secõ deve passare per il punto F.

Dim.° Imperochè dalle cose dimostrate, l'Iperbola deve tagliare Ee in guisa, che il rettang. delle parti intercette tra la curva e gli assintoti sia eguale al quadrato DU, al quale essendo eguale il rettangolo EFe, necessariamente la curva passerà per il punto F.

Prop. IV

Dati i due diametri della Iperbola, ritrovar gli assi.

Sieno dati i diametri della Iperbo=la Uu, Bb, oppure i semidiametri CU, CB. Fig.ª 31.ª
Dal punto U si tirino UE, ed Ue paralelle ed eguali a CB, e si congiungano dal centro colle rette CE, Ce, le quali per le cose dimostrate saranno gli assintoti. Si tagli per metà l'angolo degli assintoti ECe colla retta CD, che sarà quanto alla posizione il primo asse della sezione. Per determinar poi la grandezza di questo asse e del suo coniugato per il punto U si conduca FUf normale a CD, e abscindente la stessa nel punto D: quindi si faccia come FD alla mezza proporzionale tra FU ed Uf, così DC a CA: questa sarà il semiasse primo, ed AS perpendicolare alla stessa CD, sarà il semiasse secondo.

Impercioché essendo $FD : \sqrt{FU \cdot Uf} :: CD : CA$.

per la costruzione, cioè come FD : GA, sarà $\sqrt{FV \cdot Vf} = GA$, cioè $FV \cdot Vf = GA^2$. Dunque Gg toccherà l'Iperbola in A. Essendo perciò l'angolo in A retto, è evidente, che CA è il primo semiasse, ed AG il secondo. Dunque è nota la ragione, con cui si deve descrivere l'Iperbola.

Corol. Dato uno dei due diametri col suo parametro, si troverà l'altro, che è incognito; poiché egli è mezzo proporzionale tra il dato diametro, e il suo parametro; perloché con questi dati si potrà facilmente delineare l'Iperbola.

Scolio. Il metodo della proposizione superiore si fa più generale, ed è adatto ancora alla soluzione di questo altro problema

Dati i due diametri della Iperbola che siano conjugati, trovarne due altri, che si taglino in un dato angolo.

Siano dati i semidiametri CV, CB: dal punto V si tirino VE, Ve paralelle, ed eguali a CB, e congiungi gli assintoti CE, Ce. Sopra qualunque CH si descriva il segmento d'un cerchio, che comprenda un angolo eguale a quello, che devono formare i diametri cercati, il quale angolo se dalla parte dell'assintoto CE debba essere ottuso, il segmento sarà minore del semicircolo, maggiore, se deve essere acuto. Dipoi si divida per mezzo CH in K, e si conduca KM paralella a Ce concorrente in M colla circonferenza del segmento; per il qual punto si conduca CD, ed HMN. A questa sia paralella FVf che passa per il punto V, e taglia CD in D. Finalmente fà, che FD sia alla mezza proporzio- Fig.ᵃ 32.ᵃ

nale tra FV, Vf, come CD : CA; sarà CA il primo dei diametri cercati, SA parallella ad MH sarà il semidiametro suo consugato: E questi semidiametri, sono appunto quelli, che si cercavano.

Dim.° In primo luogo l'angolo CAG è eguale al dato, perchè per le parallele è eguale all'angolo CMH, che è compreso nel segmento, che dovea capire l'angolo dato; dipoi Gg è divisa per mezzo in A dalla linea CAD, perchè la sua parallela HN vien divisa per mezzo nel punto M, per essere HC tagliata egualmente per la costruzzione, e KM parallella a CN. Finalmente essendo per la costruzzione FD : $\sqrt{FV \cdot Vf}$ :: CD : CA, cioè :: FD : SA sarà SA = $\sqrt{FV \cdot Vf}$: Dunque $SA^2 = FV \cdot Vf$; e perciò essendo CE, Ce gli assintoti, sarà CA il primo semidiametro, SA il suo conjugato, che fa col primo il dato angolo. Come era proposto.

Prop. V

Dati due semidiametri conjugati della Ellisse CD, CK, ritrovar gli assi. Fig.ª 33.ª

Condotta la NDM parallella a CK che toccherà l'Ellisse nel punto D, il Problema per il Corol. 4.° della Prop. 1.ª del Cap. antecedente si riduce a questo: condurre due linee dal centro C che facciano un angolo retto, le quali taglino la tangente in M, N in maniera, che stia ND : CK :: CK : DM: Facciasi dunque CD : CK :: CK : DO, che si ponga direttamente nella linea CD: dipoi si divida egualmente CO in

R, dal qual punto si alzi RL normale a CU, che si incontri colla retta NM nel punto L. Condotta LC, e fatto centro in L nell' intervallo LC si abscindano LN, LM eguali a LC, e si congiungano CN, CM, dico questa essere la posizione degli assi, cioè che CK è la mezza proporzionale trà ND, DM, e che l'angolo NCM è retto.

Dim.° Essendo eguali le linee LC, LN, LU, LM, il cerchio descritto col centro L, e col raggio LC passerà per i punti C, N, U, M: Dunque il rettang. NDM = CDU: ma per la costruzione CDU = CK^2: Dunque NDM = CK^2: e perciò ND: CK :: CK : DM: dunque CN, CM sono le posizioni dei diametri consugati: mà l'angolo NCM nel semicerchio è retto: Dunque non solo saranno diametri, ma ancora assi.

Con ciò viene determinata la posizione, non la grandezza degli assi. Onde dal punto D, il quale certamente è nella curva si conducano all' uno e all' altro asse le ordinate DO, DF. Frà CO, e CM ritrovisi la mezza proporzionale CA, e frà CN, e CF la mezza proporzionale CB: saranno CA, CB i semiassi richiesti; poichè i semiassi per le proprietà delle tangenti sono mezzi proporzionali frà le abscisse incipienti dal centro, e le intercette frà la tangente e il centro.

Noi siamo debitori di questa soluzione al dottissimo Calendrino, come si può vedere nei Commentari del Newton scritti dai P.P. Le Seur, e Jacquier. pag. 130.

Cor. Dato il diametro col suo parametro si trova facilmente il suo conjugato, che è mezzo proporzionale trà il dato diametro, e il suo parametro.

Scolio. Lo stesso chiarissimo Calendrino fà più universale la soluzione esposta, e la adatta a questo altro problema. Dato un paio di diametri conjugati nella Elisse, trovarne un'altro paio di diametri, che facciano un angolo dato. Noi seguendo i vestigi di quest'uomo dottissimo abbiamo procurato di conciliare maggiore semplicità ed eleganza al suo metodo.

Siano dati i semidiametri CD, CK: alla retta CK, per il punto D si conduca parallela la NDM, che toccherà la sezione in D; indi producasi CD in O, finochè la retta DO sia terza proporzionale dopo CD, CK; Dividasi per mezzo la CO in R, e ad essa si eciti la normale RL. Dallo stesso punto R si abbasi la normale RZ in MN, e si conduca RQ. che faccia con RZ un'angolo dato, cioè quello, che devono comprendere i diametri cercati. congiungi LC, e fatto centro in R nell'intervallo RQ si descriva un'arco di cerchio, che tagli la LC in C sicchè condotta RC sia essa eguale ad RQ. Dal punto C si conduca CL parallela ad RC, che tagli la RL in L: da cui si tiri LN parallela ad RQ, e si adatti $LM = LN$; dico CN, CM essere la posizione dei diametri cercati. Fig.ª 34.ª

Dim.e Per le paralelle CL, RC, sarà

RO = RQ : Rl :: ζC : ζl : ma per le parallele ζN, R
RQ : Rl :: Nζ : ζl : dunque per l'eguaglianza delle ragioni ζC : ζl :: Nζ : ζl, e perciò ζC = Nζ. Ma Cζ = ζV, ζN = ζM : Dunque il cerchio descritto col centro ζ, col raggio Cζ passerà per i quattro punti C, N, V, M e il rettang. NDM = CDV, cioè per la costruz. = CK^2. Perciò CK sarà mezza proporzionale tra le parti della tangente ND, DM. Dunque per il Cor. 4.° della prop. 1.ª del Cap. precedente CV, CM quanto alla posizione sono diametri coniugati: Ma l'angolo NCM è eguale al dato; imperciocchè essendo questo posto alla circonferenza è la metà dell'angolo NζM al centro, ovvero eguale all'angolo NζT [ζT è normale ad MN, o eguale all'angolo QRζ, che per la costruzzione è eguale al dato. Come dovea dimostrarsi

Troverassi poi la grandezza dei diametri nello stesso modo, del quale si siamo serviti per trovare la grandezza degli assi.

Giudico opportuno l'aggiungere alcune determinazioni al Problema già sciolto. Poichè il cerchio descritto col centro R nell'intervallo RQ taglia la retta lC nei due punti O, o, s'averà sempre una duplice soluzione del Problema: ma devesi avvertire, che i punti, che cadono al di sotto della linea MN, come O vi danno l'angolo NCM acuto, quei che cadono sopra della linea MN, come o, danno lo stesso angolo ottuso. Consideriamo ciò che succede quando l'angolo ClR è acuto,

sempre in questa supposizione i due punti O, o verranno in mezzo la linea NM, quando l'angolo QRZ sarà maggiore dell'angolo PRZ [suppongo l'angolo CAR acuto, che se fosse ottuso, diasi lo stesso del complemento a due retti.]

Mà se QRZ = PRZ, allora il punto o caderà in L, nella quale ipotesi la costruzzione dipendente dal punto o si tenterà indarno, scostandosi il punto Z in infinito, perlochè in questa supposizione si averà solamente una costruzzione dipendente dal punto O.

Se QRZ < PRZ, i punti O, o cadono al di sotto della linea NM fino che QR diventa eguale alla perpendicolare, che da R si conduce in CZ, nel qual caso la doppia soluzione confondesi in una sola. Che se RQ sia minore di quella perpendicolare, il Problema è del tutto impossibile. Tutto ciò che abbiamo detto nell'ipotesi dell'angolo CAR acuto, facilmente si può applicare alle altre ipotesi dello stesso angolo, o retto, o ottuso.

Prop. VI

Dato il diametro della Parabola, e il suo parametro, e l'angolo, che deve fare il diametro colle ordinate, ritrovar l'asse, e il suo parametro.

Trà le molte soluzioni, che hò trovate quella scelgo, che mi fa aver l'asse per mezzo della direttrice, e del fuoco, siccome quella, che è più applicabile allo stromento per descrivere la Parabola. Sia dato il diametro DM. Prendo DQ quarta parte del Paramitro DP, è chiaro, Fig.ª 35.ª

questa essere la distanza del punto D dal fuoco della sezzione. Perlochè col centro D nell'intervallo DQ descritto il cerchio, produco MD in A, e tiro la AH tangente del cerchio. è certo questa essere la direttrice della sezzione; poichè per la natura della Parabola, tanto è distante il punto D dal fuoco, quanto dalla direttrice, che deve essere normale a tutti i diametri. Produco PD in B, e conduco BE, DE l'una normale, l'altra parallela alla direttrice, e dal punto S conduco SE, che tagli la periferia in F, dico, F essere il fuoco della sezzione.

Dim.° Prodotta SE in H, conduco DH, la quale, poichè taglia per mezzo AS, taglierà ancora per mezzo KF, BE, RC paralelle ad AS. Se però col fuoco F, col vertice V, e colla direttrice AH si descriva una parabola, questa passerà per il punto D, giacchè $DA = DF$, toccherà la linea PD; poichè RV intercetta tra questa e il vertice è equale all' abscissa VC; finalmente il parametro del diametro $DM = 4DF = DP$. Laonde questa è la parabola cercata, la cui direttrice AH, il fuoco F, il vertice dell'asse V, il parametro dell'asse $= 2KF = 4VF$. C. E. P.

Scolio. Dato il diametro della Parabola, e il suo parametro, e l'angolo compreso dal diametro, e dalle ordinate, trovare un' altro diametro, che faccia colle ordinate un' angolo dato. Per sciogliere più speditamente questo Problema, torna m.to acconcio trovare per la proposizione il fuoco Fig.a 36.a

F, la direttrice KH, e il vertice dell'asse V.
Dipoi si conduca FM, che faccia co' diametri un angolo dato, e ad essa si alzi la normale FH, che occorra alla direttrice in H. Dal qual punto si tiri HM parallela all'asse, è evidente per la prop. 4.ª del Cap. 2.º, HM essere il diametro, che per la costruzzione farà colle ordinate FM un angolo dato. Per trovare il vertice del diametro, dal punto V si conducano VD, VB, la prima parallela alle ordinate, la seconda alla direttrice intercizienti nel diametro la retta BD, la quale si divida per mezzo in L, questo punto sarà il vertice del diametro imperocchè BV tocca la sezione nel punto V, VD è ordinata al diametro HM: ma la parte del diametro intercetta fra la tangente e il vertice deve essere eguale all'abscissa posta tra il vertice e l'ordinata. Dunque non vi può essere altro vertice che il punto A. C. E. P.

Prop. VII

Dato il fuoco, e la grandezza del primo asse, descrivere l'Ellisse, e l'Iperbola, che passi per un punto dato, e tocchi una linea data. Fig.ª 37.ª, 38.ª

Sia F il fuoco, P il punto, per cui deve passare la sezzione, QT la linea, che deve esser tocca. Dal fuoco F in questa linea si conduca la perpendicolare FM, la quale prolunghisi fino che MN = FM. Indi fatto centro in N nell'intervallo del primo asse descrivasi un cerchio. Dipoi congiunta la PF, faccasi di nuovo il centro in P e col raggio, che nell'Ellisse s'agguagli alla diffe-

renza del primo asse, e della linea FP, nella Iperbola alla somma del primo asse e della linea FP, descrivasi un'altro cerchio, che taglierà il primo nel punto f; questo sarà l'altro fuoco della sezione.

Dim.° Egli è chiaro dalla natura dei fuochi. Imperciochè l'Ellisse, e l'Iperbola descritta coi fuochi F, f, e coll'asse dato passa per il punto P, perchè nell'Ellisse FP+fP, nella Iperbola fP–FP è eguale al primo asse, e tocca la sezione in O per il Corol. della prop. 2.da del cap. 3.° perchè Nf è eguale al primo asse. Dunque abbiamo descritta la sezione colle condizioni cercate.

Poichè i cerchi descritti si intersecano in due punti, averà due soluzioni il Problema, e due saranno le Ellissi, o le Iperbole, che soddisferanno al problema.

Scolio. Il metodo di sciovre questo problema, del quale ancora si è servito il Newton nella prop. 8.a del lib. 1.° dei Principj, si estende ancora ai Problemi: coi stessi dati descrivere l'Ellisse, e l'Iperbola che passi per due punti dati, o tocchi due linee date; Poichè nella stessa maniera per mezzo della intersezione dei cerchi si determinerà l'altro fuoco.

Prop. VIII

Dato il fuoco descrivere la Parabola, che passi per un punto dato, e tocchi una linea data.

Dal dato fuoco nella retta tangente PT si abbassi la normale FM, la quale prodotta finochè MN = MF, è chiaro per il Corol. della prop. 2.ª del Cap. 3.º, il punto N essere nella direttrice; indi fatto centro nel dato punto P coll' intervallo PF si descriva un cerchio, è certo che doverà esser tocco il predetto descritto cerchio dalla direttrice, poichè quella perpendicolare che dal punto P si conduce nella direttrice deve essere eguale alla retta PF. Dunque dal punto N si conduca NQ tangente del cerchio; questa sarà la direttrice. Onde in questa linea si abbassi la perpendicolare FA, che si divida per mezzo in C, e col fuoco F, vertice C, e direttrice AQ si descriva la Parabola questa toccherà la retta PT, e passerà per il punto P. Il punto poi del contatto si troverà condotta dal punto N la normale alla direttrice NO, che taglierà la data tangente in O, questo sarà il punto, in cui la curva descritta sarà toccata dalla retta PT.

Fig.ª 39.ª

Poichè dal punto N si possono condurre due tangenti nel cerchio, due soluzioni si possono aver del Problema, e descrivere due parabole colle proprietà date.

Scolio. Questo metodo adoperato ancora dal Newton nella prop. 19 del lib. 1.º dei principj, è sufficiente ancora per questi Problemi. Dato il fuoco descrivere la Parabola, che passi per due punti dati, o tocchi due linee date. Perciochè nel medesimo modo o condotta la retta, che tocchi due circoli, o congiunti i due punti, si determinerà la direttrice della curva.

Prop. IX

Col dato fuoco F descrivere la Sezzion conica d'una data specie, che passi per due punti P, M.

Congiungi FP, FM. Prendi PQ, MN in guisa, che ad FP, FM siano in ragion data; nei quali intervalli coi centri in P, M descrivi due cerchi, ai quali si conduca la tangente commune QN, nella quale da F si abbassi la normale FA; questa poi si tagli in data ragione in V. Dipoi col fuoco F, vertice V, direttrice AN si descriva la sezzione, la quale, è manifesto, essere della data specie, e passare per i punti P, M. Fig.a 40.a

Ai due circoli si possono condurre due tangenti communi; perciò due sezzioni della stessa specie si possono descrivere, che passino per due punti dati; queste però saranno eguali in questo caso, e saranno differenti nella sola posizione.

Lemma

Se sopra l'una e l'altra parte della linea AE divisa comunque in B si descrivano due triangoli equilateri AMB, BNE, e i loro vertici si congiungano colla retta MN, che concorra colla AE prodotta nel punto C, e col centro C nell'intervallo CB si descriva il cerchio BD, dico, che tutte le linee condotte a qualunque punto della circonferenza come AD, ED, sono nella stessa proporzione delle parti AB, BE.

Dim.° Si congiunga la linea CD. Per la similitudine dei triangoli valeranno queste due proporzioni Fig.ª 41.ª

CE : EN :: CB : BM . CB : BN :: CA : AM.

Dunque essendo EN = BN, BM = AM, sarà eguale

CE : CB :: CB : CA, ovvero essendo CB = CD

CE : CD :: CD : CA : Dunque simili sono i triangoli CED, CDA aventi intorno all'angolo commune C i lati proporzionali : e perciò

CE : CD = CB :: ED : AD : Ma CE : CB :: EN : BM ed EN : BM :: BE : BA . Dunque

BE : BA :: ED : AD. Come dovevasi dimostrarsi

Corol. La linea BD dividerà sempre egualmente tutti gli angoli ADE.

Scolio. Appare manifestamente, che il cerchio descritto nella predetta maniera è quella curva, o luogo, dove tutte le AD, ED sono nella ragion data. Per la costruzione sebbene mi sono servito dei triang. equilateri, pure tutti i triangoli simili, anzi tutte le figure simili possono applicarsi.

Se il punto B dividesse per mezzo la linea AE, allora la costruzione si rende vana per l'infinita distanza del punto C; ma ciascun vede, che si soddisfa al problema per mezzo della linea retta perpendicolare ad AE condotta per il punto B.

Prop. X

Dato il fuoco descrivere la sezione d'una specie data, che tocchi due linee date.

Fig.ª 42.ª

Dal fuoco F nelle date tangenti PT, VT

si abbassino le perpendicolari FM, Fm, che produ=
cansi fino che MN = FM, mn = Fm, le linee FN,
Fn si dividano in Q, q, sicchè sia FQ : QN ::
Fq : qn, come la distanza dei fuochi alla lunghezza
del primo asse, la qual proporzione è data dalla
data specie della sezione, ed è la medesima che
quella, la qual passa frà la distanza del fuoco
dal vertice dell'asse, e la distanza del vertice
dalla direttrice. Secondo la costruzzione del lemma
si descriva il cerchio Qf, cosicchè le linee condotte
dai punti F, N a ciascun punto della periferia
siano in data ragione FQ : QN: ed un simile
cerchio qf descrivasi rispetto alla linea qn.
Questi circoli si intersecheranno nel punto f, che
sarà l'altro fuoco della sezione.

Imperciochè descritta la sezione
coi fuochi F, f, e coll'asse, che agguagli la
retta FN, o fn, questa manifestamente toccherà
le linee date nei punti O, o, e sarà della
specie data, poichè stai la distanza dei fuo=
chi Ff alle linee eguali al primo asse FN, fn
in ragion data di FQ : QM, ovvero Fq : qm.

Poichè i cerchi descritti si intersecano
in due punti, si otterranno due soluzioni del
Problema.

Troverai un'altra soluzione di questo
Problema nel Newton nel lib. 1.° prop. 20, caso
secdo.

Prop. XI

Dato il fuoco descrivere la sezione d'una data specie, che tocchi una linea data in un punto dato

Fig.ª 43.ª

Sia il fuoco F, la tangente RO, il punto del contatto O. Congiungi OF, a cui alza la normale FR che concorra con OR in R, è chiaro per la proprietà della tangente, il punto R essere nella direttrice: Col centro O, e col raggio, che sia ad OF, come la distanza della direttrice dal vertice alla distanza del vertice dal fuoco, la qual proporzione è data dalla data specie della sezione, si descriva un cerchio, al quale dal punto R conducasi la tangente RQ: questa sarà la direttrice della sezione cercata.

Imperciochè descritta la sezione colla data specie, colla direttrice RQ, e col fuoco F passerà per il punto O, perchè FO:OQ è in data ragione, e toccherà RO, perchè l'angolo RFO è retto.

Ognun vede, che un'altra soluzione viene somministrata dalla seconda tangente che dal punto R si può condurre nel cerchio.

Si può leggere un'altra soluzione di questo problema appresso il Newton lib. 1° prop. 20, caso 3°

Lemma

In una data Sezzione descrivere un triangolo VFP simile a un dato NMQ in maniera, che l'angolo F, che corrisponde all'an-

Fig.ª 44.ª

golo M sia nel fuoco, l'angolo P, che corrisponde a Q, sia nella curva, e dall'angolo V corrispondente a N condotta all'altro fuoco S la VS, sia essa eguale al primo asse AB.

Si faccia l'angolo SFD = M, FSD = N, e le rette FD, SD concorrano nel punto D. Si faccia come MN : MQ :: AB alla quarta proporzionale, col qual raggio, e col centro in D si descriva un cerchio, che tagli la sezione in P: conducasi FP, e facciasi l'angolo PFV = M = DFS. Prendi finalmente FV, che sia ad FP, come MN a MQ, ovvero come AB : DP, e congiungi VP; dico, che il triang. VFP è il cercato.

Dim.º È evidente, per la costruzione, essere il triangolo VFP simile a NMQ, perchè per la costruzione VF : FP :: MN : MQ, e l'angolo VFP = M. Niente altro dunque resta da provare tolto che VS sia eguale ad AB. I triangoli VFP, SFD per la costruzione sono simili, poichè l'angolo VFP = SFD. Parimente FSD = FVP, essendo l'uno e l'altro eguale all'angolo N. Dunque

VF : FP :: FS : FD, e permutando

VF : FS :: FP : FD; e perciò i triangoli VFS, PFD aventi intorno agli angoli eguali i lati proporzionali sono simili: onde

VS : DP :: VF : FP, ovvero come MN : MQ; ma per la costruzione MN : MQ :: AB : DP. Dunque VS : DP :: AB : DP: Dunque VS = AB. Come Era Proposto.

Prop. XII

Dato il fuoco M, il punto Q, per cui deve passar la sezione, RT la linea, che dalla medesima deve esser tocca, descrivere la sezione d'una data specie. fig. 44.

Si congiunga MQ, e da M si conduca una normale nella tangente MR, che si produca fino che RN = RM, e si congiunga NQ. Descritta qualunque sezione APB, i cui vertici principali siano A, B, i fuochi F, S, in essa per il lemma si descriva il triang. VFP simile a NMQ in maniera che VS = AB: dipoi si fa l'angolo AMQ = BFP: prendi ML, che sia a MQ, come FS a FP: finalmente si prendano i punti K, H talmente posti rispetto ai punti M, L, come A, B sono posti rispetto ai punti F, S, dico, che la sezione descritta coi fuochi M, L, e col primo asse KH, è la sezione cercata. della stessa specie

Dim.° La sezione in questa maniera descritta sarà simile alla sezione APB. Dunque poichè stà FS : FP :: ML : MQ, siccome il punto P cade nella sezione, così necessariamente il punto Q sarà nella sua. Di più condotte NL, VS, poichè stà MN : MQ :: VF : FP, ed MQ : ML :: FP : FS, sarà egualmente MN : ML :: VF : FS: Dunque i triangoli MNL, VFS sono simili; e perciò NL : ML :: VS : FS: ma ML : KH :: FS : AB: Dunque parimente NL : KH :: VS : AB.

Mà VS = AB per la costruzione. Dunque NZ = KH; e perciò delle cose dimostrate si ricava che la sezione tocca la retta RT in O. Si è dunque descritta la sezione di una data specie, che tocca la retta RT, passa per il punto Q, ed hà il fuoco M. Come dovea farsi.

Scolio. Questo metodo, che hò ricavato dalla prop. 20 del Lib. 1.°, caso 4.° del Newton mancandone di più semplici, hà un grandissimo uso nelle curve simili. Imperochè mutato il Problema d'inverso in diretto, e trovatane la soluzione, la somiglianza delle curve scioglie il Problema inverso con molta facilità, ed eleganza.

Prop. XIII

Data la direttrice descrivere la sezione d'una data specie, che passi per due punti dati.

Dai dati punti P, M nella direttrice data si conducano le normali PQ, MN, indi presi PF, MF, che siano a PQ, MN nella data ragione della distanza del fuoco dal vertice alla distanza del vertice dalla direttrice, e nei centri P, M con questi intervalli descritti due cerchi, che si intersecano in F, questo sarà il fuoco della sezione cercata. La cosa è sì chiara, che non hà bisogno di essere dimostrata. Fig.ª 45.ª

Prop. XIV

Data la direttrice descrivere una sezione di una data specie, che tocchi due linee date.

Sia la direttrice BG, le linee date, che de= Fig.ª 46.ª

vono esser tocche DH, dH, le quali concorrano nel punto H: quindi abbassata nella direttrice la normale HP, si trovi la HS, che stia ad HP, come la distanza del vertice dal fuoco, alla distanza del vertice dalla direttrice, la qual proporzione è data dalla data specie della sezione. Nell' intervallo HS col centro in H si descriva il cerchio Sg, indi prodotte le tangenti della curva fino che concorrano colla direttrice nei punti B, b, da questi si conducano le tangenti del cerchio BS, bg, le quali prodotte si uniscano in F; questo sarà il fuoco della sezione.

Dim.° Congiunte BHD, bHd si facciano bFd, BFD angoli retti, e dai punti D, d si abbassino nella direttrice le normali DR, dr, e congiungansi colle linee HS, Hg il centro del circolo, e i punti del contatto. Se col fuoco F, direttrice Bb la sezione d'una data specie descrivasi, questa passerà per i punti D, d. Imperochè per la simiglianza delle figure BPHS, BRDF, sarà PH: HS :: RD: DF, cioè in data ragione. Dunque per la principale proprietà della sezione la curva passerà per il punto D: allo stesso modo dimostrerassi la curva passare per il punto d: ma per gli angoli retti BFD, bFd, la curva, che passa per i punti D, d tocca le rette BD, bd: Dunque colla data direttrice è descritta la sezione d'una data specie tangente due linee date. Come era proposto.

Scolio. Poiché da ciascun punto B, b si possono condurre nel cerchio due tangenti, ne

nascono quattro combinazioni di tangenti, dalle quali si ottengono quattro soluzioni del Problema.

Mà molte cose vi sono, che premesse sembrano impedire la soluzione: la prima, se le tangenti date siano trà se parallelle, nel qual caso si dovrà ella correggere in questa maniera: Fig.ª 47.ª Si prendano in esse qualunque BE, be eguali, e dai punti E, e si abbassino le EG, eg normali nella direttrice: descritti poi i semicircoli sopra BE, be, si applichino le corde EH, eh, che siano ad EG, eg nella data proporzione, cioè come la distanza del fuoco dal vertice alla distanza del vertice dalla direttrice. Finalmente si congiungano BH, bh, che prodotte concorrano in F: questo sarà il fuoco della sezione.

Impercioche dal punto F si tirino le FD, Fd paralelle ad EH, eh, e si conducano alla direttrice le normali DR, dr. E' chiaro, che stà RD : DF :: EG : GH, ed rd : dF :: eg : eh: dunque la sezione d'una data specie descritta col fuoco F, e colla direttrice Bb passa per i punti B, b; mà per cagione degli angoli retti BFD bFd, la medesima sezione tocca le rette BD, bd. Dunque resta descritta la sezione, come era proposto.

Questa costruzione somministra solamente due soluzioni del Problema: poichè, sebbene ciascun semicerchio BHE, bhe si può collocar doppiamente sopra le linee EB, eb, onde nascono quattro combinazioni: tuttavolta se l'uno dentro le paralelle, l'altro fuori d'esse sia posto, le linee BF, bF diventano paralelle. Di più si avverta, che il proble=

ma si rende impossibile, quando la curva da descriversi sia una Parabola; imperochè, o le linee BF, bF saranno parallele, ovvero una di esse per lo meno giacerà sopra la direttrice; e perciò o il fuoco sarà lontano infinitamente, o niente dalla direttrice.

Dipoi pare essere impedita la costruzione, se o una, o tutte due le tangenti date siano parallele alla direttrice. Se la tangente BH sia parallella alla direttrice, e l'altra bH concorra colla direttrice in b, la costruzione diviene alquanto più semplice. Abbassata HR normale nella direttrice producasi in S di modo che HR : HS stia in ragion data. Col centro H nell'intervallo HS descrivasi un cerchio, che tagli RS in S, M; dal punto b si conduca la tangente del cerchio bg, che concorra colla tangente del medesimo cerchio condotta da S, o M in F, o f: ciascuno di questi punti F, f può essere il fuoco della sezione, che deve essere descritta colle condizioni date. Fig.ª 48.ª

La dimostrazione è chiara dalle cose già dette.

Finalmente se l'una e l'altra tangente è parallella alla direttrice, il Problema, o è indeterminato, o impossibile. Alla direttrice DrD siano parallele le tangenti della figura da descriversi. Da qualunque punto A conducasi la normale alla direttrice Arω, che concorra colle tangenti in V, ω. Prendasi AV : VF in ragion data: o vale la proporzione Fig.ª 1.ª 3.ª

AV : VF :: Aω : ωF, o non vale: se vale quella

proporzione, condotta dal punto F la FP parallella alla direttrice, in qualunque punto della linea FP prendasi il fuoco, descriverassi la sezione cercata; perlochè il Problema è indeterminato; se non vale la proporzione espressa, il problema diviene impossibile, siccome da sè, senza ch'io parli, si fà abbastanza manifesto.

Prop. XV

Data la direttrice descrivere la sezione d'una data specie, la quale e passi per un punto dato, e tocchi una data linea.

Dal dato punto A si abbassi nella direttrice la normale AE, che tagli la tangente BT nel punto D. Si faccia AE : AS in ragion data e col centro A nell' intervallo AS descrivasi un cerchio SFf, nel quale certamente sarà il fuoco della sezione. Facciasi come AE : ED :: AS : AH, indi sopra BD descritto il semicerchio, adatta DK = AH, e si conduca BK che tagli il primo cerchio in F: questo punto sarà il fuoco della curva cercata. Fig.ª 49.ª

Dim.° Si conducano FT, TZ parallelle alle rette KD, DE. E' chiaro, che se col fuoco F, e colla direttrice BE descrivasi la sezione, la cui specie sia determinata dalla ragione TZ : TF, questa toccherà BD in T, essendo l'angolo TFB retto: ma questa sezione passerà per il punto A, e sarà della specie data. Imperciochè per le parallelle sarà TZ : TF :: ED : DK = AH, ma per la costruzione AE : ED :: AS : AH, e permutando

AE : AG :: ED : AH : Dunque parimente TL : TF :: AE : AG = AF ; e perciò la sezione passa per il punto A, ed essendo AE : AG la ragion data, sarà della specie data.

La linea BK taglierà ancora il cerchio in f, per il che verrà determinato un'altro fuoco col quale un'altra sezione si può descrivere. Se si congiùa il semicircolo BKD, una linea eguale ad AH si potrà applicare all'altro semicircolo; dalla quale costruzione dipendono due altre soluzioni del Problema; le quali però, se la linea BK non cadesse nel circolo FGf, diventerebbero impossibili.

Fig. 7.

Scolio. Se la tangente data o sia parallella alla direttrice, o perpendicolare, non vale la costruzione esposta. Laonde, se la tangente è parallella alla direttrice, più facilmente si troverà il fuoco così. Abbassata dal dato punto A nella direttrice la normale AE, prendi AE : AG in ragion data, e col centro A nell'intervallo AG descrivi il cerchio FGf. Concorra con EG in D la tangente BD parallella alla direttrice, quindi fà, come AE : AG :: ED : DH o Dh, e da uno di questi punti per esempio H conducasi una parallella alla direttrice secante il circolo in F, che sarà il fuoco della sezione da descriversi. Imperciochè la sezione descritta col fuoco F, vertice B, direttrice EL sarà della data specie, poichè LB : BF è in ragion data, sarà toccata dalla linea DB nel punto B, e passerà

Fig.[a] 50.[a]

per il punto A, essendo per la costruzione
EA : AF :: LB : BF.

Se la tangente sarà perpendicolare alla direttrice, descritto come sopra il cerchio GF, sopra qualunque BD presa nella tangente descrivasi il semicircolo BKD, poi si faccia AE : AS :: BD : DH cioè in ragion data, e si adatti nel cerchio la linea DK = DH, e si congiunga BK concorrente col primo cerchio in F: questo sarà il fuoco della sezione. Conducasi FT parallela a KD. Poichè stà AE : AF :: BD : DK :: BT : TF, se descrivesi col fuoco F, e colla direttrice EB la sezione della specie data, passerà per i punti A, T; ma perchè l'angolo BFT è retto, la sezione, che passa per T, toccherà BD in T: Dunque si è descritta la sezione d'una data specie, che tocca la BT, e passa per il punto A: C. E. P. Fig.^a 51.

Prop. XVI

Dato il centro, e la grandezza del primo asse descrivere una sezione, che tocchi due linee date.

Fatto centro in C centro della sezione nel dato intervallo della metà del primo asse descrivasi il cerchio mMNn, che tagli le tangenti date TM, TN nei punti M, N: dai quali si alzino alle stesse tangenti le normali MF, NF, che concorrano in F, questo sarà il fuoco della sezione. Congiungi FC, e produci fino che Cf = FC: Dico, che se coi due fuochi F, f, e col primo asse dato descri= Fig.^a 52.

verai la sezione, questa toccherà le date TM, TN.

Dim.° Producasi FM, FN in R, S sì che MR = FM, NS = FN, e congiungasi Rf, Sf. Poichè tanto Ff è divisa per mezzo in C, quanto FR in M, saranno CM, Rf parallele trà se e perciò Rf doppia di MC, ovvero eguale al dato asse: Dunque la sezione così descritta sarà tocca da TM nel punto O; Lo che dimostreràssi allo stesso modo della retta TN, che toccherà la TN nel punto o.

Noi dobbiamo riconoscere questa elegante soluzion del Problema da Giacomo Ermanno nel Tomo 4.° dell'Acad.^a Petrop.^a pag. 46.

Corol. 1.° Se dai punti m, n si conducano alle stesse tangenti le normali mf, nf, è facile a dimostrare, che queste concorrono nell'altro fuoco f.

Corol. 2.° Che se il punto M si paragoni con n, ed N con m, le intersezioni delle loro normali determineranno due altri fuochi, dai quali si potrà descrivere una nuova sezione.

Scolio. Tante cose si dovrebbero rimarcare, che stancherebbero ogni più paziente Analista. Io toccherò quello che è più rimarcabile affinche ogn'uno conosca la specie della sezione, che è da descriversi. Se essendo il centro in C, i fuochi siano compresi dentro l'angolo MTm, s'averà a descrivere una ellisse. Fig.^a 53.^a
Se l'angolo è da essi intercetto, come da 2°, ovvero l'uno nell'angolo opposto al vertice, e l'altro dentro l'angolo MTm è compreso, come

S, s, si dovrà descrivere una Iperbola. Se l'un fuoco dentro l'angolo, l'altro fuori sia posto, come R, r il problema per questi fuochi è impossibile. Imperciochè l'Elisse descritta col fuoco R, e col centro C toccherebbe un lato dell'angolo e l'Iperbola descritta col medesimo centro, e col fuoco V toccherebbe l'altro. Finalmente, se uno, o tutti e due i fuochi cadessero nei lati dell'angolo, parimente il problema diverrebbe impossibile. Poichè cadendo il fuoco e il vertice nello stesso punto, si produrrebbe una retta linea. Basta avere indicate queste cose; alle altre supplirà ogni Analista.

Prop. XVII

Dato il centro, e la grandezza del secondo asse descrivere una Ellisse, che tocchi due linee date. Fig.ª 54.ª

Col centro C, che è il dato centro della sezione da descriversi nell'intervallo della metà dell'asse 2.º si descriva il cerchio BS. Dallo stesso punto C nelle date tangenti si abbassino le normali CD, CE: dai punti D, E si conducano nel cerchio descritto le tangenti DS, EH, e ad esse eguali si roscindano CT, CK: dai punti T, K si tirino parallele alle tangenti TF, KF concorrenti in F: questo sarà il fuoco della sezione, e condotta la FC, e ad essa la normale ACB resinente nel cerchio, questa sarà l'asse secondo.

Dim.º Conducasi AF, BF, e da F le perpendicolari alle tangenti FM, FN, e congiungansi CM, CN. Ciò premesso è $AF^2 = CF^2 + CA^2 = CT^2 + DM^2 + CA^2 = DM^2 + DS^2 + CS^2 = DM^2 + CD^2 = CM^2$.

Dunque $AF = CM$. Collo stesso raziocinio dimostreràssi $BF = CN$; ma $AF = BF$; Dunque $CM = CN$, e quindi per la antecedente se descrivesi col centro C, fuoco F, semiasse primo $= CM$ l'Ellisse, questa toccherà le date rette; mà questa istessa, poichè AF è eguale al semiasse primo hà CA per semiasse secondo. Dunque è stata descritta la Ellisse tangente di due date linee col centro dato, e col semiasse secondo dato.

Ancora della soluzione di questo Problema noi siamo debitori al dottissimo Ermanno. Leggesi ella nel luogo sopracitato.

Prop. XVIII

Dato il fuoco descrivere una sezione, che passi per trè punti dati. Fig.a 55.a

Dai trè dati punti A, B, C si conducano al fuoco F le trè rette AF, BF, CF. Si prenda $FD = AF$, ed $EF = BF$, e si congiungano AD, BE, e dal punto F le parallele FS, FH che concorrano con BA, CB nei punti S, H, e si congiunga HS, dico questa essere la direttrice della curva da descriversi.

Dim.o Per la somiglianza dei triangoli sarà $AS : FD = AF :: BS : BF$, parimente $BH : EF = BF :: CH : CF$. Dunque se col fuoco F, direttrice SH descrivasi la sezione che passi per il punto B, la medesima passerà per i punti A, C. Come doveàsi farsi.

Prop. XIX

Dato il fuoco descrivere una sezione, che

passi per due punti dati, e tocchi una data linea.

Dal fuoco F ai due dati punti P, p conduci le linee FP, Fp, indi prendi FQ = Fp, e congiungi pQ, a cui sia parallella FR, che concorra con Pp prodotta in R, per il qual punto passerà certo la direttrice. Dal punto H. in cui la retta Pp taglia la data tangente DH, conducasi HK parallella a FP, poi col centro H nell'intervallo HK descrivasi un cerchio, a cui dal punto F si tiri la tangente FS, che concorra colla retta DH in B; congiungasi RB; questa sarà la direttrice della curva proposta. Fig. 5.

Dim.° Congiungasi HS, a cui sia parallella FD, e dal punto D si conduca DA parallella a PR. Poichè HK, FP sono parallelle, sarà RP : RH :: FP : KH = HS : ma per le parallelle DF, HS, così AD, RH stà

RH : AD :: HS : DF : Dunque parimente

RP : AD :: FP : DF , o permutando

RP : PF :: AD : DF : Dunque la sezione descritta col fuoco F, e colla direttrice ARB passando per il punto P passerà ancora per il punto D: ma la medesima vien tocca in quel punto dalla retta DB per l'angolo retto DFB : Dunque la sezione tocca la data DH nel punto D: ma la stessa passa per il punto p, che è facile a dimostrarsi; perciò si è descritta la sezione che passa per i punti P, p, e tocca la retta DH. C.E.P.

Prop. XX

Dato il fuoco descrivere una sezione, che tocchi

trè rette linee.

Sia F il fuoco dato, le trè tangenti date siano AP, AG, GM. Dal fuoco F in ciascuna tangente si conducano le normali FP, FQ, FM le quali si producano in R, S, N finochè PR = FP, QS = FQ., MN = FM. Si congiungano NS, SR, le quali divise per mezzo in L, K si eccitino ad esse le perpendicolari Lf, Kf, le quali concorrano in f; dico, questo essere l'altro fuoco della sezione che dee descriversi, la quale descritta coi fuochi F, f, e col primo asse eguale alla retta Nf sarà toccata dalle trè date rette MG, GA, AP. Fig.a 57.a

La dimostrazione è facile. Imperciochè essendo Nf, Sf, Rf tutte eguali frà se, tutte agguaglieranno il primo asse: Dunque le linee date MG, GA, AP toccheranno la sezione nei punti, dove dalle linee Nf, Sf, Rf sono tagliate: Dunque col fuoco F si è descritta la sezione tangente di trè linee date. C. E. P.

Scolio. Sebbene per la costruzione e per la nostra dimostrazione niente importa il sapere per quai punti passino le linee Lf, Kf, pure la costruzione si fà più facile ed elegante se si avverte, passar elle per i punti G, A, nei quali si intersecano le tangenti. Lo che dimostro così. Nel triangolo NFS i lati NF, FS sono divisi per mezzo, e perpendicolarmente dalle linee MG, QG concorrenti in G. Dunque G è il centro del cerchio circoscritto allo stesso triangolo. e perciò Lf che divide per mezzo, e perpendicolarmente la corda del cerchio NS, passerà per il centro G. Rispetto al punto A dicasi lo stesso di Kf.

Prop. XXI

Dato il fuoco descrivere una sezione, che tocchi due linee date, e passi per un punto dato.

Sia F il fuoco dato, MG, GQ le tangenti, P il punto, per cui deve passar la sezione. Dal fuoco F si conducano perpendicolari alle tangenti le FM, FQ, che si producano in N, S, fino chè MN = FM, QS = FQ. Pòi col centro P nell' intervallo FP si descriva un cerchio FHB. Finalmente si concepisca descritto un cerchio, che passi per i punti N, S, e tocchi il cerchio FHB, il qual Problema è stato da noi sciolto, dove si trattò ~~delle~~ de' contatti dei circoli. dico, che il centro di questo cerchio così descritto, che suppongo il punto f, sarà l'altro fuoco, e la sezione descritta coi fuochi F, f, di cui il primo asse = Nf passerà per il punto P, e toccherà le due rette MG, GQ. Fig.ª 58.ª

Dim.° Si congiunga fP, che passerà per il contatto H dei circoli, e si conduca FP. Poichè Nf, Sf sono eguali trà se, e al primo asse, la sezione descritta sarà toccata dalle rette MG, GQ in quei punti, nei quali queste sono tagliate dalle rette Nf, Sf: Mà poichè fH = fN, e perciò al primo asse, saranno ancora ad esso eguali fP + PF, onde la sezione passerà per il punto P. C.E.P.

La costruzione deve farsi in questa maniera. Dal punto N per il centro P del cerchio

si conduca NAB, indi si prenda in NS il punto D sichè il rettangolo DNS = BNA. Dal punto D si conduca la tangente del cerchio DE, e per E la NH. Finalmente alle rette NS NH divise egualmente in C, K si alzino le perpendicolari Cf, Kf, il punto f del loro concorso sarà il centro del cerchio che passa per i punti N, S, e tocca il cerchio AEB, e perciò sarà l'altro fuoco della sezion da descriversi. Tutto ciò è manifesto per la Teoria dei contatti che abbiamo esposta.

Scolio. Gli ultimi trè Problemi sono stati sciolti dal Newton colla descrizione della Iperbola; avverte però, che si possono essi risolvere coll'uso delle sole linee, e dei cerchi per il libro dei contatti di Apollonio restituitoci dal Vieta. Noi ci siamo serviti della Teoria dei contatti solamente nell'ultimo, che è il più difficile trà tutti, gli altri abbiamo sciolti con un metodo più agevole ed elegante. Coll'esempio di queste soluzioni non sarà difficile la soluzione di qualche altro Problema: ma vi sono ancora molte cose più disastrose e difficili, intorno alle quali ne parleremo nel Cap. seguente.

CAP. VI

In cui dimostrate alcune proprietà delle Sezioni Coniche, si sciolgono alcuni più difficili Problemi

È stato dimostrato da Apollonio, che due qualunque linee parallele à due date talmente si tagliano nella Sezione Conica, che il rettang. delle parti dell'una stà al rettang. delle parti dell'altra sempre in ragion data. La quale proprietà veramente ammirabile, e commune a qualunque sezione non dovevasi ommettere; specialmente, perchè da quella il Newton hà tratto la soluzione di moltissimi Problemi, i quali noi esporremo in questo cap.° seguendo il metodo d'un tant'uomo.

Prop. I

Condotta nella Parabola qualunque corda ED, che sia tagliata da qualunque diametro LA; indi condotto un altro diametro AB, che tagli ordinatamente la corda ED; dico, che il rettang. EHD è eguale al rettang. del parametro del diametro AB, e di KH. fig. 59

Dim.° Si chiami il parametro del diametro $AB = p$, e si tiri KT parallela a ED, che sarà eguale a AB, poichè nella Parabola i diametri sono paralleli. Per la proprietà della Parabola è $p \cdot AB = BE^2$. Parimente $p \cdot AT = KT^2 = HB^2$: Dunque sottratta l'una equazione dall'altra, sarà $p \cdot TB$, ovvero $p \cdot KH = EB^2 - HB^2 = EHD$. C. D. D.

Corol. Questa stessa dimostrazione con poco svario vale ancora, se il punto H cade fuor della curva

Prop. II

Nella Parabola si taglino le linee ED, FS parallele a due date, dico che il rettang. EHD è al rettang. FHS in ragion data. Fig. 60.

Dim.° Per il punto H si conduca il diametro KH, e i parametri dei diametri, che tagliano bisparti le corde ED, FS si chiamino P, p: per la pria propos.e sarà $EHD = P.KH$, ed $FHS = p.KH$: Dunque $EHD : FHS :: P.KH : p.KH :: P : p$. ma la ragione $P : p$. è data: Dunque eccet. C.D.D.

Corol. Della stessa dimostrazione ci potiamo servire, se il punto H cade fuori della curva.

Prop. III

Se nell'Ellisse due corde MN, DL parallele a due diametri conjugati AB, VO si taglino in S, dico, che il rettang. MSN stà al rettang. DSL in ragion data del quadrato AC al quadrato CO. Fig. 61.

Dim.° Dai punti M, N si conducano MR, NS parallele al diametro CO. Chiamisi $AC = a$, $OC = b$, $CR = x$, $CH = z$: Dunque $RH = x - z$, ed $SH = x + z$: Dunque il rettang. RHS, ovvero $MSN = x^2 - z^2$. Si chiami parimente $MR = SH = y$, $HD = u$: Dunque $DS = u - y$, e $SL = u + y$; e perciò il rettang. $DSL = u^2 - y^2$: ma per la proprietà della sezione è

$a^2 - x^2 : y^2 :: a^2 : b^2$; parimente

$a^2 - z^2 : u^2 :: a^2 : b^2$; Dunque sottratta la prima dalla seconda si averà

$x^2-z^2 : u^2-y^2 :: a^2 : b^2$, cioè il rettang. MSN

MSN : DSL :: $AC^2 : CO^2$. C. D. D.[si]

Corol. 1.° Quindi se si condurrà un'altra KFQ parallella a DL, sarà il rettang.

KFQ : DSL :: MFN : MSN.

Corol. 2.° Le stesse cose varrebbero, sebbene i punti S, F, o un solo, o tutti e due cadessero fuor della curva.

Prop. IV

Se dai termini di qualunque diametro ED si tirino DL, ET, parallelle ad un'altro diametro CO, a cui è coniugato AB; ed a questo si conduca la parallella MN, che tagli DL in S, DE in F; dico, stare il rettang.° Fig. 62.ª

DSL : DFE :: $DH^2 : DC^2$.

Dim.° ET tagli MN in T; per la somiglianza de' triangoli sarà

DS : DF :: DH : CD; parimente

ET, o SL : FE :: DH : CD : Dunque componendo le ragioni

DSL : DFE :: $DH^2 : CD^2$. C. D. D.[si]

Corol. Questa istessa dimostrazione vale, ancora che i punti S, F cadano fuori della curva.

Prop. V

Le stesse cose poste sarà MSN : MFN :: $DH^2 : CO^2$.

Condotte le linee come sopra, si tiri parimente per il punto F, KFQ, parallella a CO. Si chiami $CR=x$, $MR=y$, $CA=a$, $CO=b$, $CP=z$, $CH=c$, $DH=e$; sarà il rettang. RHS = MSN = x^2-z^2, Fig. 61.ª

e il rettang. $RPS = MFN = x^2 - z^2$: ma per la similitudine de' triangoli

$CA : AD :: CP : PF = MR$, ovvero

$c : e :: z : y = \frac{ez}{c}$: Dunque $z = \frac{cy}{e}$,

il qual valore sostituito sarà il rettang.

$MFN = x^2 - \frac{c^2y^2}{e^2}$: ma per la proprietà dell'Ellisse

$a^2 - x^2 : y^2 :: a^2 : b^2$: Dunque $y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$: e

perciò $MFN = \frac{a^2e^2x^2 + c^2b^2x^2}{a^2e^2} - \frac{c^2b^2}{e^2}$: ma per

la proprietà della medesima sezione

$a^2 - c^2 : e^2 :: a^2 : b^2$: Dunque $a^2e^2 = b^2a^2 - b^2c^2$,

il qual valore parimente sostituito, sarà

$MFN = \frac{b^2x^2 - c^2b^2}{e^2}$: ma $x^2 - c^2 : \frac{b^2x^2 - c^2b^2}{e^2} :: e^2 : b^2$.

Dunque il rettang. $MGN : MFN :: DA^2 : CO^2$

Prop. VI

Le medesime cose poste, sarà il rettang. $MFN : DFE :: AC^2 : DC^2$ fig. 62

Dim. Il rettangolo

$MFN : DFE$ è in rag.e $MFN : MGN$ $CO^2 : DA^2$ per la quinta

composta di $MGN : DGL$ ovvero $AC^2 : CO^2$ per la terza

$DGL : DFE$ $DA^2 : DC^2$ per la quarta.

Dunque $MFN : DFE :: AC^2 : DC^2$. C. D. D.

Corol. Resta intiera la dimostrazione anche quando il punto F cade fuor della curva.

Prop. VII

Se due corde MN, KQ parallele a due date si taglieranno nell'Ellisse, sarà il rettangolo $MFN : KFQ$ in ragion data.

Dim.e Dal centro della sezione C conduci i semidiametri CA, CO paralelli alle corde MN, KQ. e di più il diametro DCE, che passi per il punto F. Fig. 62

Poichè per la precedente il rettangolo

MFN . DFE :: $AC^2 : DC^2$. Parimente per la stessa ragione

DFE : KFQ :: $DC^2 : CO^2$, sarà equalmente

MFN : KFQ :: $AC^2 : CO^2$, la quale ragione essendo data, è manifesto, essere i rettang. MFN : KFQ in rag. data

Corol. La dimostrazione ritiene la sua forza se il punto F è fuori della curva.

Prop. VIII

Due linee paralelle a due date si intersecano nella Iperbola in maniera, che i rettangoli delle parti comprese trà il punto dell'intersezione e la curva sono in ragion data. Fig. 63

Mi servo della dimostrazione del Calandrino nei Com.i del Newton dei P.P. Le Seur, e Jacquier pag. 117. MN, KQ, si taglino nel punto F, e l'iperbola nei punti M, N, K, Q; e siano esse paralelle a due date: dico, che il rettang. MFN : KFQ è in ragion data. Si conducano gli assintoti della Iperbola CH, CT, e si producano MN, KQ, fino che taglino ambidue gli assintoti nei punti H, G, L, T: e per il punto M tirisi la RMS paralella ad LT. Per la similit.e de' triang.i GFT, GMS, sarà GF : SM :: FT : MS, ovvero

GM + MF : SM :: TQ + FQ : MS; parimente perche sono simili i triangoli HFL, HMR,

ma

$HF : HM :: FL : RM$, ouvero

$HN + NF : HM :: LK + KF : RM$; e quindi componendo le ragioni

$SM \cdot HN + SM \cdot NF + HN \cdot MF + MF \cdot NF : SM \cdot HM ::$
$TQ \cdot LK + TQ \cdot KF + LK \cdot FQ + FQ \cdot KF : MS \cdot RM$:
Mà $HN = SM$, $LK = QT$, e $MS \cdot MR = LQ \cdot QT$;
Dunque sostituiti questi valori sarà
$SM \cdot HN + SM \cdot NF + SM \cdot MF + MF \cdot NF : SM \cdot HM ::$
$TQ \cdot LK + TQ \cdot KF + TQ \cdot FQ + FQ \cdot KF : LQ \cdot QT$:
mà $HN + NF + MF = HM$,
$LK + KF + FQ = LQ$: Dunque
$SM \cdot HM + MF \cdot NF : SM \cdot HM ::$
$TQ \cdot LQ + QF \cdot KF : LQ \cdot TQ$: e perciò dividendo
$MF \cdot NF : SM \cdot HM :: QF \cdot KF : LQ \cdot QT$: ma condotti i semidiametri CA, CO paralelli a HS, LT stà $SM \cdot HM : LQ \cdot QT :: CA^2 : CO^2$.
Dunque $MF \cdot NF : QF \cdot KF :: CA^2 : CO^2$; la qual ragione per esser data, è evidente, che il rettang. $MFN : QFK$ è in ragion data. C.D.D.

Corol: Questa proposizione vale, o cada il punto F dentro, o fuori della curva, ~~ovvero~~ o l'una e l'altra linea tagli la stessa Iperbola, o ciascuna tagli l'Iperbola opposta, o una di esse tagli la medesima Iperbola, e l'altra la opposta. Laonde da tutte queste proposizioni si raccoglie coverto

Teorema Universale

In qualunque Sezion Conica, se due linee parallelle a due date si tagliano, i rettangoli fatti dalle linee comprese tra il punto della intersezione e la curva sono sempre in detta ragione. Che se i due punti, nei quali la linea taglia la sezion conica si accostino in guisa che finalmente coincidano, allora quella linea di secante si cambierà in tangente, e il rettangolo di cui parliamo in quadrato, e valeranno affatto le stesse cose.

Prop. IX

Trovare il centro d'una sezion conica, che passi per cinque punti dati. fig. 64.

Siano i cinque punti dati A, B, C, D, E, per i quali debbasi descrivere la sezion conica, il cui centro s'ha a trovare. Congiungi due qualunque punti colla retta AC: altri due parimente colla retta BE, le quali rette si taglino in H; alla BE, si tiri la parallella DT, che tagli AC in T, ed alla AC la parallella EG, che tagli DT in G. Queste produci in F, R sicchè sia

AHC : BHE :: ATC : FTD :: EGR : FGD.

I punti F, R saranno nella curva. Ma nella produzione delle linee DT, EG devesi avvertire, che i punti F, R hanno ad essere nella stessa sezione, nella quale sono i punti dati. Se il punto

H cade trà i punti sì A, C, come B, E, o
fuori di tutti questi punti, il punto T eziandio
caderà sì trà i punti A, C, come F, D, o pur
fuori di tutti. Similmente anche il punto G
deve cadere o dentro, o fuori, di tutti i punti
F, D, ed E, R. Ma se il punto H cade
trà i due punti A, C, e fuori dei due, B, E
od al contrario, ancora il punto T dovrà cade-
re dentro i due punti A, C, ed F, D, e fuori
degli altri due: parimente il punto G deve
cadere trà i due punti F, D, ed E, R, e fuori
degli altri due. Questo poi facilmente faràssi
64 se si renderanno TF, GR verso quelle parti
dei punti T, G, le quali esigge la condizione
del Problema.

Trovati i punti F, R, biseca AC,
ER in N, O, e congiungi NO, che sarà
un diametro della sezione. Parimente biseca
BE, FD nei punti L, M, e congiungi LM
che sarà un altro diametro. l'intersezione
dei due diametri in K mostrerà il centro
della sezione.

Scolio. Molte cose si averebbero
a notare; trà l'altre in che modo trovato
il centro vengasi a scoprire la specie della
sezione, e restino determinati quei punti che
sono necessarj per la descrizion della curva.
Ma io passerò sotto silenzio tutto ciò che è più
ovvio e facile a disvelarsi per toccar quello sola-

mente, che sembra essere di maggiore importanza.

Se i diametri LM, NO si trovano paralelli, la sezione sarà una Parabola: agevolmente poi si determina il vertice del diametro LM in questa maniera.

Sia questo il punto Q, preso dalla parte dell'inferiore ordinata. Si chiami $MQ = x$, $ML = a$, $LB = b$, $MD = c$, sarà necessariamente $b^2 : c^2 :: a+x : x$, e dividendo $b^2 - c^2 : c^2 :: a : x$: Dunque $x = \frac{ac^2}{b^2 - c^2}$. Trovato poi il punto Q, dalle cose antecedenti si fà manifesto il modo di descriver la curva.

Se i diametri si intersecano in K, e questo punto è più vicino alla ordinata maggiore, la sezione sarà una Ellisse, nella quale con questo metodo si verranno a discoprire i vertici del diametro LM.

Siano questi P, Q. Ritenute l'altre denominazioni chiamisi $LK = m$, $KM = n$, e $PK = KQ = x$, sarà per la proprietà della Ellisse $LB^2 : MD^2 :: PLQ : PMQ$, ovvero

$b^2 : c^2 :: \overline{x-m} \cdot \overline{x+m} : \overline{x+n} \cdot \overline{x-n}$, oppure

$b^2 : c^2 :: x^2 - m^2 : x^2 - n^2$, e dividendo

$b^2 - c^2 : c^2 :: n^2 - m^2 : x^2 - n^2$, ovvero

$\frac{c^2 \cdot \overline{n^2 - m^2}}{b^2 - c^2} + n^2 = \frac{b^2 n^2 - c^2 m^2}{b^2 - c^2} = x^2$, e

$\pm \sqrt{\frac{b^2 n^2 - c^2 m^2}{b^2 - c^2}} = x$; trovati i punti P, Q si descrive

P. Ellisse.

Finalmente se il punto K sarà più vicino all'ordinata minore, la sezione è manifestamente una Iperbola, e nella medesima maniera si determinano i vertici O, P del diametro LM. Ritenute le denominazioni già poste, poichè stà

$LB^2 : MD^2 :: PLQ : PMQ$, sarà

$b^2 : c^2 :: \overline{m-x} \cdot \overline{m+x} : \overline{n-x} \cdot \overline{n+x}$, cioè

$:: m^2 - x^2 : n^2 - x^2$, e dividendo

$b^2 - c^2 : c^2 :: m^2 - n^2 : n^2 - x^2$: dunque

$$\frac{c^2m^2 - c^2n^2}{b^2 - c^2} = n^2 - x^2, \text{ ovvero}$$

$$x^2 = n^2 - \frac{c^2m^2 + c^2n^2}{b^2 - c^2} = \frac{b^2n^2 - c^2m^2}{b^2 - c^2}; \text{ e perciò}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{b^2n^2 - c^2m^2}{b^2 - c^2}}$$

Che se la radice $\sqrt{\frac{b^2n^2 - c^2m^2}{b^2 - c^2}}$ fosse immaginaria, indicherebbe, non essere primo, ma secondo il diametro LM. Perlochè per il centro K si conduca KUT parallela a LB, la quale sarà certamente il primo diametro conjugato al secondo LM: a questo se si conducano da B, D le parallele BT, DU, saranno ordinate al diametro KT. Laonde in questo si potranno determinare i vertici col metodo suddetto. Dalle quali tutte cose si rende chiaro abbastanza in qual modo s'abbia a descrivere una sezione conica che passi per cinque punti dati.

Prop. X.

Trovare il centro d'una sezione, che passi per quattro punti dati, e tocchi in uno di quelli una linea data di posizione. Fig. 65°

Siano i quattro punti dati A, B, C, D, ed AE la retta, che deve esser tocca dalla sezione conica in A. Congiungi due punti qualunque colla retta DC, che prodotta, se fa d'uopo, tagli AE nel punto E. A questa dal quarto punto B si conduca la BF, che tagli la tangente in F. Parimente alla tangente sia parallela la retta DH, che incontri BF nel punto I. Nelle rette FB, DI si prendano i punti G, H in guisa, che stia $AE^2 : CED :: AF^2 : BFG$, ovvero
$:: DIH : BIG$. Questi punti, purchè non si trascurino le condizioni notate nella precedente, e siano presi verso quelle parti dei punti F, I, che vuole la regola, saranno nella sezione conica. Biseca BG, DC, DH nei punti K, L, M, e congiungi KL, AM, che saranno diametri della sezione, l'intersezione de' quali nel punto O darà il centro della sezione.

Scolio. Per determinare la specie della Sezione, e per trovare i vertici dei diametri, si riveggano quelle cose, che sono state esposte nello Scolio della proposizione antecedente.

Prop. XI

Trovare il centro d'una sezione, che tocchi due linee date in punti dati, e passi per un terzo punto. fig. 65ª

Siano le date AD, BD, le quali deve toccar la sezione nei punti A, B, e C il punto per cui deve ella passare. Congiungi AB, la quale taglia per mezzo in E; dal concorso delle tangenti D conduci DE, che sarà il diametro della sezione. Per trovare il suo vertice, dal punto C si tiri CF paralella ad AE. Suppongasi il centro della sezione in O. Trà OD, OE trovisi la mezza proporzionale OV, ed V sarà il vertice del diametro. Chiamisi $DE = m$, $EF = n$, $CF = b$, $AE = c$, $EO = x$, sarà $VO = \sqrt{x \cdot \overline{m+x}}$. Per la proprietà della sezione sarà

$$AE^2 : CF^2 :: \overline{VE \cdot \overline{VO+EO}} : \overline{VF \cdot \overline{VO+FO}},$$

$$c^2 : b^2 :: \overline{\sqrt{x \cdot \overline{m+x}} - x} \cdot \overline{\sqrt{x \cdot \overline{m+x}} + x} :$$

$$: \overline{\sqrt{x \cdot \overline{m+x}} - x + n} \cdot \overline{\sqrt{x \cdot \overline{m+x}} + x - n},$$

cioè $c^2 : b^2 :: mx : mx + 2nx - n^2$, e levando gli antecedenti dai conseguenti

$$c^2 : b^2 - c^2 :: mx : 2nx - n^2,$$ e moltiplicando il primo e terzo termine per $\frac{2n}{m}$

$$\frac{2nc^2}{m} : b^2 - c^2 :: 2nx : 2nx - n^2.$$ e dagli antecedenti levando i conseguenti

$$\frac{2nc^2}{m} : \frac{2nc^2}{m} - b^2 + c^2 :: 2nx : n^2,$$ ouvero

$n^2c^2 : 2nc^2+mc^2-mb^2 :: x:1$: dunque
$$x = \frac{n^2c^2}{2nc^2+mc^2-mb^2}.$$

Scolio. Se la quantità $2nc^2+mc^2-mb^2=0$ il punto O è infinitamente lontano dal punto E, che indica la sezione essere una Parabola, in cui il vertice V del diametro divide bifaria la retta DE.

Se quella quantità è positiva, la curva sarà un' Ellisse, la quale dato il centro O, il diametro, e il suo vertice, agevolmente descrivesi.

Finalmente, se quella quantità è negativa, la sezione sarà un' Iperbola, e DE sarà il secondo diametro, se il centro O cade trà i punti D, E, se cade dopo i punti E, D, sarà il primo diametro. Mà in ciascun caso dato il vertice V del diametro DE, si fà noto, in che maniera vada descritta la curva.

Prop. XII

Trovare il punto, in cui la sezione che passa per quattro punti, toccherà una linea data. Fig. 67.

I punti dati B, D, E, C si congiungano colle rette EC, BD, che si intersechino in G, e taglino la linea data in H, I. Sia nella data linea HI il punto del contatto A. Dal punto A si conduca AK parallella a GI, che supongasi tagliar la sezione in X, Y. Per la commune proprietà di tutte le sezioni sarà

$AH^2 : AI^2 :: XHY : EIC$, cioè in ragione composta di $XHY : BHD$
$BHD : EIC$.

Ma la prima di queste ragioni è la stessa che CGE : DSB : Dunque

$AH^2 : AT^2$ in ragione composta di CGE : DSB
BAD : ETC,

le quali ragioni essendo date, sarà ancora data la ragione $AH^2 : AT^2$, e di AH : AT; e quindi sarà determinato il punto A. Il qual trovato non resta altro, che per cinque punti B, D, A, C, E descrivere la sezione. Lo che di sopra abbiamo insegnato.

La prattica poi per trovare il punto è tale. Trà CG, e GE si trovi una mezza proporzionale, che chiamo = m. Similmente trà BH, e DH un'altra mezza proporzionale, che chiamo = n. Parimente tra DS, e BS, trà ET, e CT, la prima sia = p, la seconda = q. Sarà AH : AT :: $\sqrt{mn}$: $\sqrt{qp}$. Trà m, n trovo una nova media proporzionale, siccome trà p, q: la prima = f, la secda = g, sarà AH : AT :: f : g.

Scolio primo. Il punto A in due maniere può esser preso, sì dentro i punti H, T, come fuori; onde si fà chiaro che il Problema hà due soluzioni.

Scolio 2.° Non m'è ignoto, che a volte può accadere, che la linea HK non cada punto nella sezione conica; ciò non pertanto la costruzione esposta è universale. Si assuma qualunque punto h, da cui si conducano hx, hb paralelle a TS, AS, e secanti la sezione conica nei punti x, y; b, d, ed hb tagli ST in z. Ripetuta la

dimostrazione sudetta sarà

$hA^{\wedge} : AT^{\wedge}$ in ragione composta di $CgE : dgb$
$bhd : ETC$,.

Mà $CgE : dgb :: CGE : DGB$, e
$hA^{\wedge} : bhd :: HA^{\wedge} : BHD$, le quali ragioni
acconciamente sostituite sarà

$HA^{\wedge} : AT^{\wedge}$ in ragione composta di $CGE : DGB$
$BHD : ETC$;

Siccome s'era anche trovato nella proposizione.

Fino a quì delle Sezioni Coniche.

Dei Luoghi Geometrici del secõ grado, o Del modo di costruire le Equazioni, che involvono due indeterminate.

PARTE. II

BIBLIOTECA CITTADINA

Dei Luoghi Geometrici Del Secondo Grado

CAP. I.

Definizione prima. Equazioni indeterminate si dicono quelle, che abbracciano più variabili. Presentemente noi consideriamo quelle che ne contengono due. In tali equazioni, se una variabile per esempio x in una linea retta si prenda a maniera d'ascissa, e l'altra per esempio y a maniera d'ordinata faccia coll'ascissa un'angolo a piacere, è evidente, che i punti estremi di tutte le ordinate comporranno una linea curva, la quale si suole chiamare il luogo Geometrico dell'equazione. Così il luogo geometrico dell'equazione $ax = yy$ sarà una parabola, perchè se le x si prendano nel diametro, il cui parametro $= a$ tutte le ordinate y termineranno in una curva parabolica. In avvenire la specie x sempre indicherà l'ascissa, y la ordinata.

Definiz.e 2.a Per conoscere il grado dell'equazione, prendasi in ciascun termine la somma degli esponenti dell'una e l'altra variabile. Questo poi deve farsi dopo avere eliminato dall'equazione tutti i segni radicali, e tutti i divisori, nei quali si trovano le variabili. Così l'equazione $ax^4 + x^2y^3 = a^3y^2$

è del quinto grado, perchè nel sec.do termine la somma degli esponenti = 5.

Defin.e 3.a Il luogo dell'equazione dicesi essere in quel grado, nel quale l'equazione è costituita. In questo capo pertanto principalmente s'hà a dimostrare, che non vi sono altri luoghi geometrici del sec.do grado oltre le sezioni coniche. Ma prima diremo alcune cose intorno ai luoghi geometrici del primo grado, le quali appianeranno la via per le più disastrose.

Prop.e I

Trovare l'equazione ecumenica alla linea retta.

Mi servirò di due metodi, perchè secondo le diverse circostanze ciascuno hà il suo particolar uso.

Sia qualunque retta CM, alla quale si deve trovare l'equazione ecumenica. Sia parimente qualunque AP, nella quale si prendano le ascisse che cominciano in A, e le ordinate MP facciano con quelle qualunque angolo. Dal punto A si conduca AC parallella alle ordinate MP, la quale concorra con CM in C, dal qual punto conducasi la CS parallella alla retta AP. Si chiami $AP=x$, $PM=y$, $AC=r$, sarà $MN = y-r$. Ma stà $CN : NM$ in ragion costante di $CS : SF :: p : q$; Dunque $x : y-r :: p : q$, dalla quale analogia nasce la prima equazione $y - \frac{qx}{p} - r = 0$. Fig.a 1.a

L'altro metodo è tale. Producasi il lato CM, e la linea delle ascisse AP fino che concorrano in D. Sia come sopra $AP=x$, $PM=y$. Si chiami $AD=s$, sarà $DP=x-s$: ma $x-s:y::DS:SF::p:q$. Dunque averemo la seconda equazione $x-\frac{py}{q}-s=0$ Fig.ª 2.ª

Corol.º primo. Se, o AC nella fig.ª 1.ª rispetto alla linea AP, o AD nella fig.ª 2.ª rispetto al punto D giacessero dall'altra parte, allora avrebbero i valori r, s negativi, che se CS sopra AP nella fig.ª 1.ª o il punto D cadesse sopra il punto A nella fig.ª 2.ª, sariano le specie $r, s=0$.

Corol.º 2.º Se la linea CM in tutte e due le figure fosse posta dall'altra parte rispetto alla linea AP, allora una delle specie p, q sarebbe negativa, ovvero la proporzione di $p:q$ sarebbe come il positivo al negativo: perlochè la SF giacerebbe dall'altra parte rispetto alla linea CS nella Fig.ª 1.ª o alla AS nella Fig.ª 2.ª Fig.ª 1.ª

Corol.º 3.º Se CM fosse parallela alla retta AP, allora $p:q$ sarebbe come l'infinito al finito, o come qualche quantità finita $m:0$: Dunque la prima equazione sarà $y-r=0$, la seconda $x-\frac{my}{0}-s=0$, che involve le quantità infinite. Laonde per ischivarle, doveremo servirsi in questo caso della prima equazione.

Corol.º 4.º Se CM s'incontra colla retta

AP in quell'angolo, che colla medesima devono fare le ordinate, allora la proporzione $p:q$ sarà, come il finito all'infinito; o come $o:m$. Dalla prima equazione proverrà $y - \frac{mx}{o} - r = o$, che abbraccia le quantità infinite. Dalla seconda equazione averemo $x - s = o$, la quale perciò sarà più opportuna per evitare le quantità infinite.

Scolio. In questa proposizione coi suoi corollarj si contengono tutte le equazioni del primo grado. Imperochè tale è l'equazione ecumenica $Ax + By + C = o$, in cui se $B = o$ averassi il caso del Corol.° 4.° se $A = o$, averassi il caso del Corol.° 3.°, se $C = o$ dal primo Corol.° viene questo caso abbracciato. Se tutte le quantità sono negative, o positive, tutti i casi vengono compresi dalla prop.e coi primi due Corollarj. Perlochè la linea retta è il luogo di tutte le equazioni indeterminate del primo grado.

Prop. II

Costruire il luogo di qualunque equazione indeterminata del primo grado.

Si confronti l'equazione data colla prima, o seconda equazione, come sembra più commodo adequando ciascun termine dell'una, con ciascheduno dell'altra. Dalla quale comparazione si determini il valore della proporzione $p:q$; e parimente il valore della specie r, o s, i quali determinati si otterrà del luogo cercato la costruzione. La Teoria si farà più chiara dalli esempi.

Esempio primo. Sia proposta l'equazione $ax-by+ab=0$. Per confrontarla colla prima equazione, dividasi per $-b$, e sarà $y-\frac{ax}{b}-a=0$. Paragona questa equazione colla prima sicchè ciascun termine abbia il suo eguale, e sarà $\frac{q}{p}=\frac{a}{b}$, ed $a=r$. Sia AP la linea delle ascisse, nella quale si prendano le x, che cominciano in A, e proseguiscano verso P; poichè $r=a$ si assuma $AC=a$, che con AP faccia quell'angolo, che ad arbitrio proprio devono fare le ordinate colle ascisse. Da C conducasi CG parallela ad AP. Mà poichè $p:q::b:a$, prendasi $CG=b$, GF parallella ad $AC=a$, e congiungi CF; questa sarà il luogo cercato. Fig.a 1.a

Si troverà affatto la medesima equazione, se farassi la comparazione colla seconda equazione ecumenica. Per fare la qual cosa dividasi la data equazione per a, ed averassi $x-\frac{by}{a}+b=0$. Dalla comparazione otterrassi $\frac{p}{q}=\frac{b}{a}$, ed $s=-b$. Sia AP la linea, dove si prendono le ascisse x incipienti in A, e perchè $s=-b$ hà il valore negativo, prendasi AD $=b$, la quale però sia posta all'altra parte rispetto al punto D al contrario della figura 2.a Dipoi perchè $p:q::DS:SF::b:a$, si prenda $DS=DA=b$, ed in qualunque angolo si eciti $SF=a$, e si congiunga DF: questo sarà il luogo cercato, ed $AP=x$, $PM=y$ Fig.a 3.a

Esempio 2.o Sia proposta l'equazione

$ax + by - a^2 = 0$. Per poter farne il paragone colla prima equazione, dividasi per b, e sarà $y + \frac{ax}{b} - \frac{a^2}{b} = 0$. Dalla comparazione, ivi proverrà $\frac{q}{p} = -\frac{a}{b}$, e $r = \frac{a^2}{b}$. Sia AP la linea delle ascisse che cominciano in A, e poni CA nell'angolo delle ordinate $= \frac{a^2}{b}$. Prendasi GC $= b$, GF $= a$, la quale sia paralella a CA, e posta dall'altra parte rispetto alla linea CG, perchè la proporzione $p : q$, è come il positivo al negativo. Congiungi CFM, questa sarà il luogo cercato, ed AP saranno $= x$, PM $= y$. Fig.^a 1.^a

Se vuoi servirti della seconda equazione ecumenica, dividi la proposta equazione per a, ed averai $x + \frac{by}{a} - a = 0$. Fatta la comparazione sarà $\frac{p}{q} = -\frac{b}{a}$, $s = a$. Prendi AD $= a$, e DG $= b$, indi GF $= b$, che deve essere posta dall'altra parte, perchè la proporzione $p : q$ è come il positivo al negativo. Congiungi DFP, questo sarà il luogo cercato, e saranno AM $= x$, MP $= y$. C. D. F. Fig.^a 2.^a

Esempio 3.° Sia proposta l'equazione $y - x = 0$. Confrontala colla prima ecumenica, e troverai $\frac{q}{p} = 1$, ovvero $q = p$, e $r = 0$. Perchè AC, o $r = 0$ la retta CN caderà sopra la AP: conduci GF $=$ AG in qualunque angolo, e si congiunga AFM, questo sarà il luogo, ed AP $= x$, PM $= y$. Fig.^a 1.^a

Troverai la medesima costruzione, se farai il confronto colla seconda equazione ecumenica.

Esempio 4.° Sia proposta l'equazione $y + a = 0$

Per isfuggire le quantità infinite, si faccia il confronto colla prima equazione, e troverassi $q=0$, $r=-a$. Poichè r è quantità negativa, prendi dall'altra parte $AC=a$, conduci CM questo sarà il luogo cercato, e saranno $AP=x$, $PM=y$. Fig.ª 1.ª, 7.ª

Scolio. Una cosa per se chiara e facile non ha bisogno di ulteriori esempi. Questo solo si avverta, che le y allora sono positive quando dalla linea AP dipartendo s'addirizzano all'insù, negative poi quando vanno all'ingiù.

Prop. III

Trovare l'equazione ecumenica della Parabola.

Sia la Parabola CM, e qualunque linea AP, nella quale si prendano le ascisse incipienti in $A=x$, $PM=y$, qualunque sia l'angolo MPA. Si conduca quel Diametro della parabola, che taglia per mezzo tutte le corde parallelle a MP, e questo sia CG. Dal punto A conduci AFE parallella al diametro, e dallo stesso punto A conduci AD parallella a PM, che concorra col diametro in D. Sia poi AC il parametro del diametro CG. Prendi una definita AB, e dal punto B conduci BE parallella a PM. Chiama $AB=m$, $BE=n$, $AE=e$, $AD=r$, $DC=s$, e il parametro $CH=p$. Poichè sta $AB:AE::AP:AF=DG$, sarà analiticamente $m:e::x:DG=\frac{ex}{m}$: Dunque $GC=\frac{ex}{m}-s$. Parimente $AB:BE::AP:PF$: Dunque analiticamente $m:n::x:PF=\frac{nx}{m}$: Dunque Fig.ª 8.ª

$SM = y - \frac{nx}{m} - r$. Mà per la proprietà della parabola $SM^2 = p \cdot CS$: Dunque analiticamente.
$y^2 - \frac{2nxy}{m} + \frac{n^2x^2}{m^2} - 2ry + \frac{2nrx}{m} + r^2 = \frac{epx}{m} - ps$; onde nasce la prima equazione

$$y^2 - \frac{2nxy}{m} + \frac{n^2x^2}{m^2} - 2ry + \frac{2nrx}{m} + r^2 = 0 .$$
$$- \frac{epx}{m} + ps$$

Mà perchè nell'uso di questa formula si possono introdurre alcune quantità infinite, ne daremo un'altra, perchè sempre si possano evitare. Sia $AP = x$, $PM = y$. Dal punto A, in cui le ascisse hanno origine conduci AQ parallela alle ordinate MP, e si congiunga qualunque MQ parallela alle ascisse AP. Sia CS il diametro della parabola, che taglia per mezzo tutte le corde parallele a MQ, il cui parametro sia CH. Questo diametro producasi, se fia d'uopo, fino che concorra colla linea delle ascisse in D. Dal punto A conduci AF parallela al diametro CS. Prendi una qualche definita AB, e conduci BE parallela ad AP. Sia $AB = m$, $BE = n$, $AE = e$, $AD = r$, $CD = s$. Poichè stà Fig.[a] 9.

$AB : AE :: AQ = PM : AF$, sarà analiticamente

$m : e :: y : AF = \frac{ey}{m} = SD$; e perciò
$CS = \frac{ey}{m} - s$. Parimente $AB : BE :: AQ : QF$, ovvero adoperati i simboli analitici $m : n :: y : QF = \frac{ny}{m}$: e quindi $SM = x - \frac{ny}{m} - r$: ma per la proprietà della sezione, se il parametro $CH = p$, è $SM^2 = p \cdot CS$.

Dunque $x^2 - \frac{2nxy}{m} + \frac{n^2y^2}{m^2} - 2rx + \frac{2rny}{m} + r^2 = \frac{pey}{m} - ps$,
onde è la secōdā equazione

$$x^2 - \frac{2nxy}{m} + \frac{n^2y^2}{m^2} - 2rx + \frac{2rny}{m} + r^2 = 0$$
$$- \frac{pey}{m} + ps$$

Scolio. Nell'una e nell'altra equazione devesi avvertire, che se uno dei quadrati x^2, y^2 sia privo di coefficiente, il coefficiente dell'altro è sempre eguale al quadrato della metà del coefficiente del termine xy, il qual termine suol dirsi piano. Per lo chè se il piano è lontano dall'equazione, è necessario che ancora l'uno dei quadrati sia lontano; perchè $\frac{n}{m} = 0$. Tutte le quantità determinate possono essere sì positive che negative anzi anche 0, se p si eccettui. Che se nella prima equazione la proporzione $n:m$ è come $1:0$ nella seconda $n:m$ sarà come $0:1$, onde avviene, che nelle comparazioni tutte le quantità infinite si possono evitare.

Prop. IV

Trovare l'equazione ecumenica della Ellissi.

Cominciano le ascisse x in A, e si prendano in AP, e siano PM le ordinate $= y$. Per il centro C della Ellissi si conduca il diametro HK, che divide per mezzo tutte le corde parallele a PM, il cui parametro sia $KH = p$. Al diametro si conduca la parallela AE, e si prenda una definita Fig.^{a} 10

AB = m, e si tiri la BE = n parallela a PM, e sia AE = e. Similmente sia AD = r parallela a PM, e sia DG = s. Finalmente il semidiametro ZK = 2t. Poichè i trianḡ simili ABE, APF danno AF = DS = $\frac{ex}{m}$, e PF = $\frac{nx}{m}$, sarà perciò SM = $y - \frac{nx}{m} - r$, e GS = $\frac{ex}{m} - s$: Dunque ZS = $t + \frac{ex}{m} - s$, SK = $t - \frac{ex}{m} + s$: ma per proprietà della Ellisse ZK : KH :: ZS.SK : MS²; dunque analiticamente $2t : p :: \overline{t + \frac{ex}{m} - s} \times \overline{t - \frac{ex}{m} + s} : \overline{y - \frac{nx}{m} - r}^2$. E perciò $y^2 - \frac{2nxy}{m} + \frac{n^2x^2}{m^2} - 2ry + \frac{2rnx}{m} + r^2 = \frac{p}{2t} \times t^2 - \frac{e^2x^2}{m^2} + \frac{2sex}{m} - s^2$; onde proviene l'equazione ecumenica della Ellisse.

$$y^2 - \frac{2nxy}{m} + \frac{n^2x^2}{m^2} + \frac{e^2px^2}{2m^2t} - 2ry + \frac{2nrx}{m} - \frac{2epsx}{2mt} + r^2 - \frac{pt^2}{2t} + \frac{ps^2}{2t} = 0.$$

Scolio. Nelle equazioni dell'Ellisse è chiaro, che i quadrati x^2, y^2 sono affetti dei medesimi segni, e il quadrato della metà del coefficiente del piano, cioè $\frac{n^2}{m^2}$ è minore di $\frac{n^2}{m^2} + \frac{e^2p}{2m^2t}$, la quale quantità moltiplica il quadrato x^2. Suppongasi qui liberato d'ogni coefficiente il quadrato y^2.

Prop. V

Trovare l'equazione ecumenica dell'Iperbola ai diametri.

Siano AP le ascisse, PM le ordinate. Per il centro C della sezione si conduca il diametro ZK = 2t, il quale ora sarà primo, come nella Fig.ª 11ª, ora secondo, Fig.ª 11ª

come nella fig.ª 12.ª, il cui parametro sia $KH = p$. Dal punto A origine delle ascisse si tiri AF parallela al diametro; indi presa una definita $AB = m$, si conduca parallela alle ordinate la $BE = n$, e sia $AE = e$. Parimente parallela alle ordinate si conduca $AD = r$, e $DC = s$. Per la similitudine de' triangoli ABE, APF, facilmente si conosce, essere $PF = \frac{nx}{m}$; $AF = DG = \frac{ex}{m}$. Dunque $GC = \frac{ex}{m} - s$, e $GM = y - \frac{nx}{m} - r$. Ma per le cose dimostrate sta, come

$KL : KH :: CG^2 - CK^2 : GM^2$, se LK è il 1° diametro

$KL : KH :: CG^2 + CK^2 : GM^2$, se LK è il 2.° diam.°

ovvero esprimendo le due formule con una sola

$KL : KH :: CG^2 \mp CK^2 : GM^2$, nella quale il segno superiore appartiene al primo diametro, il segno inferiore al secondo. Perciò se noi si serviamo dei simboli analitici, sarà

$$2t : p :: \frac{e^2x^2}{m^2} - \frac{2esx}{m} + s^2 \mp t^2 : y^2 - \frac{2nxy}{m} + \frac{n^2x^2}{m^2} - 2ry + \frac{2nrx}{m} + r^2.$$

onde proviene finalmente l'equazione generale

$$\begin{array}{l} y^2 - \frac{2nxy}{m} + \frac{n^2x^2}{m^2} - 2ry + \frac{2nrx}{m} + r^2 = 0. \\ \qquad\quad - \frac{e^2px^2}{2m^2t} \qquad\quad + \frac{2epsx}{2mt} \pm \frac{pt^2}{2t} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - \frac{ps^2}{2t} \end{array}$$

Scolio. Se il quadrato y^2 sia libero d'ogni frazione, il quadrato della metà del coefficiente del piano xy sempre è maggiore del coefficiente dell'altro quadrato x^2. Perlochè se il piano xy non si trova nell'equazione, è necessario, che il quadrato x^2 sia affetto del segno $-$.

Prop. VI

Trovare l'equazione all'Iperbola considerata trà gli assintoti.

Intendasi costituita l'Iperbola frà gli assintoti LC, CK. AP siano le ascisse $=x$, PM le ordinate $=y$, le quali siano parallelle all'assintoto CL. Prendasi una definita $AB=m$, si conduca $BE=n$ parallella alle ordinate PM, e si chiami $AE=e$. Sia parallella alle ordinate la retta $AD=r$, e sia $DC=s$. Prendasi $CK=AE=e$ e conducasi $KH=p$ parallella all'assintoto CL. Ciò posto per i trianoli simili ABE, APF sarà $AB:AE::AP:AF$, ovvero coll'analisi $m:e::x:\frac{ex}{m}$; e perciò $CG=\frac{ex}{m}-s$, $GM=y-\frac{nx}{m}-r$; perchè $PF=\frac{nx}{m}$; Mà per proprietà della curva il rettang. $CG\cdot GM=CK\cdot HK$: Dunque $\frac{exy}{m}-sy-\frac{nex^2}{m^2}+\frac{nsx}{m}-\frac{erx}{m}+rs=pe$, onde nasce l'equazione prima. $xy-\frac{nx^2}{m}-\frac{msy}{e}+\frac{nsx}{e}-rx+\frac{mrs}{e}-mp=0$. Fig.ª 18

In questa equazione il piano xy si trova insieme col quadrato x^2. Per trovar l'equazione del piano xy col quadrato y^2 si serviremo di questo metodo.

Costituita l'Iperbola AM trà gli assintoti KC, CL, si prendano in AP parallella a CL le ascisse $=x$, PM siano le ordinate $=y$, le Fig.ª 1[illegible]

quali facciano qualunque angolo colle ascisse. Dal punto A parallela alle ordinate conduci una indefinita AQ, nella quale si prenda una definita AB = m; di poi parallela all' assintoto DK si tiri una indefinita AF, e dal punto B parallela all' altro assintoto sia BE = n; chiamisi AE = e, AD = r, DC = s. Prendi CK = = AE = e, e parallela all' altro assintoto CH sia KH = p. I triangoli simili ABE, AQF danno queste analogie AB : AE :: AQ = PM : AF = DS, ovvero analiticamente $m : e :: y : DS = \frac{ey}{m}$.

AB : BE :: AQ : QF,

ovvero analiticamente $m : n :: y : QF = \frac{ny}{m}$.

Perloche averemo $GM = x - \frac{ny}{m} - r$, e $CG = \frac{ey}{m} - s$: ma per proprietà della sezione il rettang. $CG \cdot GM = CK \cdot KH$. Dunque sarà

$$\overline{\frac{ey}{m} - s} \times \overline{x - \frac{ny}{m} - r} = ep;$$ da cui proviene

la seconda equazione $$xy - \frac{ny^2}{m} - \frac{msx}{e} + \frac{nsy}{e} + \frac{mrs}{e} = 0.$$
$$- ry \quad - mp$$

Scolio 1°. E' evidente, che in queste formule uno solamente dei quadrati x^2, y^2 può aver luogo insieme col piano xy.

Scolio 2°. Tutte codeste formule si sono tolte dal Marchese de l' Hospital, il quale nel libro 7° delle sezioni coniche, dove parla dei luoghi geometrici, ha trattato di ciò con tanta eleganza, che pare, non vi si possa aggiungere

d'avantaggio. In queste formole poi si contengono tutte le equazioni del secondo grado. Imperochè mancando nella formola data il piano xy, se l'uno e l'altro quadrato sia affetto dello stesso segno, essa apparterrà all'Ellissi, se sia affetto di segni diversi all'Iperbola, se manchi eziandio uno dei quadrati, alla parabola. Se la formula contiene il piano xy mancando uno dei quadrati, ella va riferita all'Iperbola fra gli assintoti. Finalmente se la formula abbraccia tanto il piano xy, quanto i quadrati x^2, y^2, devesi liberare da ogni coefficiente il quadrato y^2, indi s'ha a vedere, se il quadrato della metà del coefficiente del piano xy sia maggiore, eguale, o minore del coefficiente del quadrato x^2. Se è maggiore, spetta all'Iperbola, se eguale alla Parabola, se minore, all'Ellissi. Laonde si fà evidentissimo, non esservi alcun altro luogo geometrico del secondo grado oltre le sezioni coniche. Tutto ciò sarà reso più chiaro dalle proposizioni che io soggiungo.

Prop. VII

Costruire il luogo d'un'equazione indeterminata del secondo grado; in cui mancando il piano xy resta solamente uno de' quadrati x^2, y^2.

Si paragoni l'equazione data con una delle equazioni alla parabola, colla prima, se vi sia il quadrato y^2, colla seconda, se vi sia il quadrato x^2.

e si determinino col confronto i valori m, n, e, v, s, p; i quali determinati si averà il luogo cercato.

Esempio primo. Sia proposta l'equazione $y^2 - 2ay - 2bx + ab = 0$. Si faccia la comparazione di questa colla prima equazione alla Parabola. Fig.ª 8.ª, 15.ª

$$y^2 - \frac{2nxy}{m} + \frac{n^2x^2}{m^2} - 2vy + \frac{2nvx}{m} + v^2 = 0, \quad \text{dalla}$$
$$- \frac{epx}{m} + ps$$

quale paragonati i termini facilmente troverai $n = 0$; essendo adunque $n = BE = 0$, la retta AE caderà sopra la retta AB, e quindi sarà ad essa eguale; onde averemo $m = e$. Procedendo nella comparazione si troverà $v = a$, $p = 2b$, e $v^2 + ps = ab$, in cui sostituiti i valori trovati di v, e p si farà $a^2 + 2bs = ab$, ovvero $s = \frac{ab - a^2}{2b}$. Dalle quali determinazioni ne segue questa costruzione.

Sia AP la linea delle ascisse, e A il loro principio. In quell'angolo, che devono fare le ordinate colle ascisse si conduca $AD = v = a$, poi DS parallela ad AP, in cui assumi $DC = s = \frac{ab - a^2}{2b}$, e col parametro $CH = 2b$ descrivasi col dato diametro CG la parabola CM, questa sarà il luogo cercato, e saranno $AP = x$, $PM = y$.

Scolio. Abbiamo supposto nella costruzione $b > a$, ed $\frac{ab - a^2}{2b}$ quantità affermativa. Che se $b = a$, la quantità $\frac{ab - a^2}{2b} = 0$; onde nulla sarebbe la DC, e il punto C che è il principio del diametro caderebbe in D. Se poi $b < a$

la quantità $\frac{ab-a^2}{2b}$ sarebbe negativa, e il punto C caderebbe dall'altra parte rispetto al punto D, come in K, che perciò sarebbe il principio del diam.°

Scolio 2.° Per vedere tutte le ascisse, e tutte le ordinate, che corrispondono alla proposta equazione è necessario descrivere una intera parabola, nè tralasciare il ramo Cmam, il qual ramo taglierà la linea delle ascisse in qualche punto O. A qualunque ascissa corrispondono due ordinate, ciascuna positiva fino al punto O, dopo il quale l'una sarà positiva come $pPaM$, l'altra negativa pam, poichè questa giace dall'altra parte rispetto alla linea delle ascisse AP.

Esempio 2.° Sia proposta l'equazione $y^2+ay+bx+\frac{a^2-b^2}{4}=0$. I termini di questa | Fig.ª 8.ª
si devono paragonare coi termini della prima equazione della Parabola, e troverassi $n=0$. Laonde $AB=AE$, ovvero $m=e$, di nuovo $r=AD=-\frac{a}{2}$, $p=CH=-b$. Finalmente $r^2+ps=\frac{a^2-b^2}{4}$. Invece di r, p si sostituiscano i valori trovati, e sarà $\frac{a^2}{4}-bs=\frac{a^2-b^2}{4}$, ovvero $s=DC=\frac{b}{4}$.

Costruzione. Comincino le ascisse in A, e proseguiscano verso P. In qualunque angolo conduci $AD=\frac{a}{2}$, la quale, poichè nelle determinazioni proviene negativa, si deve collocare al di sotto della linea AP, indi parallela ad AP si prenda $DC=\frac{b}{4}$. Finalmente col parametro

$CH = b$ si descriva la Parabola $zMCm$, questa sarà il luogo cercato.

Scolio. Si consideri attentamente, che nella fig.ª 10.ª è stata descritta la parabola inversamente da quella che è nella fig.ª 8.ª Questo si è fatto, perchè nelle determinazioni il valore del parametro proviene negativo, che indica abbastanza, doversi dirigere la parabola all'opposto. Che se il valore del parametro fosse $=0$, allora veramente la parabola sarebbe impossibile, ma la formola darebbe sempre un quadrato perfetto, onde estratta la radice nascerebbe una semplice formola appartenente alla linea retta.

Esempio 3.º Sia l'equazione

$x^2 - 2ax + \overline{a-b} \cdot y + b^2 = 0$. Questa deve essere comparata colla seconda equazione alla Parabola, poichè si trova solamente il quadrato x^2. Paragonati perciò i termini, sarà $n = BE = 0$: Dunque $AB = AE$, cioè $m = e$. Di nuovo $2a = 2r$, ovvero $r = AD = a$, $p = CH = b - a$. Finalmente $r^2 + ps = b^2$ e in vece delle specie r, p sostituiti i valori sarà $a^2 + bs - as = b^2$, ovvero $s = \frac{b^2 - a^2}{b-a} = b + a$. Fig.ª 9.ª

Poichè il parametro $CH = p = b - a$ può essere positivo, e negativo, anzi ancora $=0$, ciascun caso deve essere considerato. Se $b = a$, allora $p = 0$; ma in questa ipotesi la formola data si cambia in questa $x^2 - 2ax + a^2 = 0$, la quale estrattane la radice $x - a = 0$ spetta alla linea retta.

Se $b > a$, il parametro p è positivo. Si=

ano AP le ascisse. Prendi $AD = a$, applica a qualunque angolo $DC = a + b$. Finalmente col parametro $CH = b - a$, e col diametro CD descrivasi una Parabola, la quale sarà il luogo cercato dell'equazione, ed AP saranno le ascisse, PM parallele a CD le ordinate. Fig.ª 9

Se $b < a$, allora p sarà negativo; perlochè presa come sopra nella linea delle ascisse $AD = a$, $CD = a + b$, col parametro $HC = a - b$, e col diametro CD descrivasi inversamente la parabola CM, AP saranno le ascisse, PM parallele a CD saranno le ordinate della data equazione. Fig.ª 9

Esempio 4° ed ultimo. Sia l'equazione $x^2 - ay = 0$. Confrontati i termini di questa, e della seconda equazione alla parabola troverai $n = BE = 0$, e perciò $AB = AE$, e $m = e$. Così $r = 0$, $p = a$, $s = 0$.

Poichè tanto $AD = r$, quanto $DC = s$ sono eguali $= 0$, i punti A, D, C coincideranno, ed essendo $BE = 0$ AB coinciderà con AE. Dunque dal punto A descrivasi con qualunque diametro la parabola AM, il parametro del qual diam.° sia $AH = a$, ed AP tocchi la parabola, AP saranno le ascisse, PM le ordinate della equazion data, purchè siano queste parallele al diametro. Fig.ª 9

Prop. VIII

Costruire i luoghi di quelle equazioni, nelle quali mancando il piano xy, i due quadrati x^2, y^2 sono affetti del medesimo segno.

Trasportati dall'una parte dell'equazione tutti i termini in guisa, che l'uno e l'altro quadrato x^2, y^2 sia affetto del segno + si liberi da ogni coefficiente il quadrato y^2, indi i termini della equazione data si confrontino coi termini della equazione ecumenica all'Ellissi, onde determinati i valori delle indeterminate m, n, e, r, s, p, t si ottenga la costruzione del luogo cercato.

Esempio prº. Sia proposta l'equazione $y^2 + x^2 - 2by + 2ax + b^2 = 0$. Paragonato ciascun termine di questa equazione coi termini della equazione ecumenica all'Ellisse troverai $n = BE = 0$, e perciò $AB = AE$, ovvero $m = e$. Parimente $\frac{e^2 p}{2m^2 t} = \frac{p}{2t} = 1$, cioè $p = 2t$, ovvero $HK = KL$, $r = AD = b$, $s = DC = a$. Finalmente $r^2 - t^2 + s^2 = b^2$, e in vece di r, s sostituiti i loro valori $b^2 - t^2 + a^2 = b^2$, oppure $t^2 = a^2$, ovvero $t = a$, e $2t = LK = HK = 2a$. Fig.ª 10.ª

Sia AP la linea delle ascisse; in qualunque angolo conduci $AD = b$, e dal punto D la retta LD parallela ad AP, in cui prendi $DC = a$, questa si prende alla parte opposta, perchè il valore della retta CD è negativo. Dipoi si assumi $CK = CL = a$, il punto K caderà in D: Parimente si prenda $HK = LK$; Finalmente col diam.º LK, e col diametro KH si descriva una Ellisse LMKm la quale sarà il luogo cercato. Alle ascisse positive AP non corrisponde alcuna ordinata, Fig.ª 20.ª

alle ascisse negative Ap corrispondono due ordinate pM, pm.

Scolio. Se l'angolo CDA, che fanno le ordinate colle ascisse sarà retto, il luogo descritto sarà un cerchio; imperocchè quando sono eguali il lato transverso, e il lato retto nella ipotesi dell'angolo retto, l'Ellisse si converte in circolo, come è chiaro dalle cose antidette.

Esempio 2°. Sia proposta l'equazione $y^2 + \frac{ax^2}{b} + 2ax - b^2 = 0$, i termini della quale, se si paragonano coi termini dell'equazione ecumenica, troveremo $n = BE = 0$, e perciò $AB = AE$, ovvero $m = e$. Parimente $\frac{cp}{pt} = \frac{a}{b}$, $r = 0$, $-\frac{cps}{pt} = 2a$, $\frac{ct^2}{pt} - \frac{ps^2}{pt} = b^2$. Dalle quali equazioni facilmente caverànsi i seguenti valori delle indeterminate $r = DA = 0$, $s = DC = -b$, $t = CK = b\sqrt{\frac{b+a}{a}}$, $p = KH = 2a\sqrt{\frac{b+a}{a}}$. I quali determinati ne sorge la costruzione seguente. Fig.ª 10ª, 21

Sia AP la linea delle ascisse, ed A la loro origine. Prendasi $AC = b$ dalla parte opposta, perchè il valore s è negativo, di poi si assuma $CK = 2b\sqrt{\frac{b+a}{a}}$, la quale sia posta in guisa che sia divisa per mezzo dal punto C, e dal punto K in quell'angolo, che devono fare le coordinate si alzi $KH = 2a\sqrt{\frac{b+a}{a}}$, e col parametro KH, lato transverso CK si descriva una Ellisse, questa sarà il luogo cercato, ed AP saranno le ascisse, PM le ordinate.

Esempio 3.° Sia data l'equazione Fig.a 10.a 20.a

$y^2 + 2x^2 - 2ay + 2bx + b^2 = 0$. Dalla comparazione dei termini coi termini della equazione ecumenica all'Ellisse facilmente si troverà

$n = BE = 0$, $m = AB = e$, $r = AD = a$,

$s = DC = -\frac{b}{2}$, $t = CK = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{4}}$,

$p = KH = 4\sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{4}}$.

21.a

Tre casi s'hanno a distinguere, il primo quando $\frac{a}{\sqrt{2}} > \frac{b}{2}$, indi quando $\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{b}{2}$: finalmente quando $\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{2}$. Nel 1.mo caso, fatto in 2A il principio delle ascisse, sia 2AP = x. Si ponga 2A2D = a in qualunque angolo, poi parallela a 2AP prendasi C2D = $\frac{b}{2}$ dalla parte opposta, perchè il suo valore è negativo; indi si assuma ZK $= 2\sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{4}}$ che sia divisa bifaria dal punto C, e parallela a 2A2D si tiri KH doppia di 2A2D: finalmente col diametro ZK, param.° KH descrivasi una Ellisse, che sarà il luogo cercato.

Se $\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{b}{2}$, allora sì il lato trasverso ZK, che il lato retto KH = 0. Nella quale ipotesi vediamo qual sia per essere nella stessa equazione il valore di y. L'equazione data nella supposizione che $\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{b}{2}$ con facilità si commuta in quest'altra $y^2 - 2ay + a^2 = -2\cdot\overline{x^2 + bx + \frac{b^2}{4}}$ onde estratta la radice, $y - a = \left(x + \frac{b}{2}\right)\sqrt{-2}$; dalla

quale apparisce, essere sempre immaginario il valore dell' incognita y, qualunque sia il valore della indeterminata x o positivo, o negativo.

Quest'istesso avviene, se $\frac{a}{\sqrt{r}} < \frac{b}{r}$, nel qual caso il valore tanto del lato retto quanto del lato transverso viene ad essere immaginario.

Scolio. Qualunque volta in quelle equazioni, nelle quali i due quadrati delle indeterminate sono affetti del medesimo segno, mancando il piano, il valore del lato retto, o del transverso avviene immaginario, o nullo, nullo ancora, o immaginario, che è lo stesso, sarà il luogo della equazion data a motivo che il valore della quantità u, qualunque sia il valore dell' altra x, sempre si fà immaginario.

Prop. IX

Costruire i luoghi di quelle equazioni, che contengono i due quadrati x^2, y^2 affetti di segno diverso, se da esse manchi il piano xy.

Devesi disporre l'equazione in maniera, che il quadrato y^2 sia affetto del segno $+$, e sia privo d'ogni coefficiente; il quadrato poi x^2 sia affetto del segno $-$, e tutti i termini giaciano dall' una parte. Poi sono da paragonarsi i termini dell'equazione coi termini dell'equazione ecumenica della Iperbola ai diametri, e da determinarsi i valori delle indeterminate.

costanti m, n, e, r, s, t, p: le quali determinate si potrà fare la costruzione. Ma perchè al termine $\frac{pt^2}{2t}$ nella equazione ecumenica si è prefisso il segno ambiguo $\pm$, egli doverà determinarsi in guisa, che restino eliminate dalla equazione le quantità immaginarie. Che se dovrà prendersi il segno superiore $+$, la Iperbola dovrà essere riferita al primo diamo al secdo, se si dovrà prendere il segno inferiore $-$.

Esempio 1.° Sia proposta l'equazione $y^2 - x^2 - 2by + 2ax + b^2 = 0$. Fatta la comparazione troverai $n = EB = 0$, $m = AB = AE = e$, $\frac{p}{2t} = 1$, $r = AD = b$, $s = DC = a$, e Fig.ª 11.ª 22.ª

$r^2 \pm \frac{pt^2}{2t} - \frac{ps^2}{2t} = b^2$, nella quale ultima, se si introducono i valori trovati, sarà $b^2 \pm t^2 - a^2 = b^2$, ovvero $\pm t^2 = a^2$. Per ischivare le quantità immaginarie, s'ha a prendere il segno superiore $+$, il che indica, doversi riferire l'iperbola al pro diam.°, come nella Fig.ª 11.ª In tal maniera determinato il segno ambiguo sarà $t = CK = a$, $p = KH = 2a$, e l'equazione si costruirà così.

Sia AP la linea delle ascisse. Dalla origine A in qualunque angolo conduci $AD = b$ indi parallella ad AP la retta $DC = a$, la quale si produca in K, fino che $CK = a$. Fi=

nalmente col primo diam.° DK, e col param.° KH = DK si descriva una Iperbola, la quale sarà equilatera, e il luogo della equazione proposta.

Esempio 2.° Sia $y^2 - \frac{ax^2}{b} + 2ax - 3ba = 0$, Fig.ª 12.ª i termini della quale equazione se si confrontano coi termini della equazione ecumenica dell'Iperbola ai diametri troverai $n = BE = 0$, $m = AB = AE = e$ $\frac{p}{2t} = \frac{a}{b}$, $v = AD = 0$, $\frac{ps}{2t} = a$; $v^2 \pm \frac{pt^2}{2t} - \frac{ps^2}{2t} = -3ba$. Dai quali di nuovo troverai $s = DC = b$, e $\pm \frac{at^2}{b} - \frac{ab^2}{b} = -3ba$, e moltiplicando per $\frac{b}{a}$ sarà $\pm t^2 - b^2 = -3b^2$: Dunque $\pm t^2 = -2b^2$. Affinchè possiamo evitare le immaginarie in questa equazione, è necessario assumere il segno inferiore — il che indica che l'Iperbola, la quale è il luogo della data equazione, deve essere riferita non al primo ma al secondo diam.° Dunque determinato il segno diviene $t = CK = b\sqrt{2}$, e $p = KH = 2a\sqrt{2}$. Dai quali valori ne nasce codesta costruzione.

Si prendano le ascisse in AP, in cui si assumi $AC = b$, indi si faccia $CK = Ck = b\sqrt{2}$, e $KH = 2a\sqrt{2}$, col secondo diam.° Kk e col suo parametro KH in qualunque angolo descrivasi l'uno e l'altro ramo dell'Iperbola MO, mo, questo sarà il luogo cercato, in cui AP sono le ascisse, PM le ordinate.

Esempio 3.° I termini della proposta equazione $y^2 - \frac{ax^2}{b} - 2by - 2ax + b^2 - ab = 0$ si paragonino

coi termini della equazione ecumenica della iperbola ai diametri, e si avevanno queste determinazioni $n=0$, $m=e$, $r=b$, $\frac{p}{rt}=\frac{a}{b}$, $\frac{ps}{rt}=-ra$, $s=-b$, e $r^2 \pm \frac{pt^2}{rt} - \frac{ps^2}{rt} = b^2 - ba$; nella quale introdotti i valori opportuni diventa

$b^2 \pm \frac{at^2}{b} - ab = b^2 - ab$: Dunque $\pm at^2 = 0$, e perciò $p=0$

Di questa equazione pare impossibile la costruzione, poichè in essa tanto il diam.° della iperbola, quanto il param.° $=0$. Ma devesi considerare, che l'equazione costa di due quadrati, dai quali, se si pongano in diverse parti della equazione, si può estrarre la radice quadrata. Imperocchè dispongasi l'equazione così $y^2 - 2by + b^2 = \frac{ax^2}{b} + 2ax + ab =$ $= \frac{a}{b} \cdot \overline{x^2 + 2bx + b^2}$. Estratta la radice, sarà $y - b = \frac{\overline{x+b} \cdot \pm \sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, la quale, come è noto, appartiene alla linea retta.

Scolio. Qualunque volta in quelle equazioni, che abbracciano i due quadrati x^2, y^2 affetti di segni diversi senza vi siano xy, il valore del diam.°, o del param.° si fà nullo, l'iperbola si commuta in una linea retta. Questo poi facilmente appare dalla stessa equazione ecumenica, la quale se tanto t, quanto p sono eguali $=0$, è composta di due quadrati, dai quali posti in diverse parti della equazione si può cavare la radice quadrata.

Imperocchè nella equazione cancellato il termine $\pm\frac{pt^2}{2t}$, che per la ipotesi si fà $=0$, resta

$$y^2-\frac{2nxy}{m}+\frac{n^2x^2}{m^2}-2ry+\frac{2nrx}{m}+r^2=0$$
$$-\frac{e^2px^2}{2m^2t}\qquad+\frac{2epsx}{2mt}-\frac{ps^2}{2t}$$

oppure traslati opportunamente i termini

$$y^2-\frac{2nxy}{m}+\frac{n^2x^2}{m^2}-2ry+\frac{2nrx}{m}+r^2=\frac{p}{2t}\times\overline{\frac{e^2x^2}{m^2}-\frac{2esx}{m}+s^2},$$

dalla quale estratta la radice quadrata proviene

$$y-\frac{nx}{m}-r=\pm\sqrt{\frac{p}{2t}}\times\overline{\frac{ex}{m}-s}.\quad \text{C. D. D.}$$

Prop. X

Costruire i luoghi di quelle equazioni, nelle quali il piano xy v'ha luogo o senza alcun quadrato, o solamente con uno dei quad.^{ti} x^2, y^2.

Devesi paragonare la data equazione con una delle equazioni dell'Iperbola fra gli assintoti; colla prima, se siavi il quadrato x^2, colla seconda, se vi sia il quadrato y^2, con qualsivoglia se non v'abbia luogo alcuno dei quadrati: dal qual confronto si verranno a determinare le linee che sono necessarie.

Esempio I.^{mo} Sia proposta l'equazione Fig.^{a} 13.^{a}

$xy+ay+bx-ab=0$, la quale, poichè non contiene alcuno dei quadrati x^2, y^2 si può paragonare tanto colla prima, quanto colla seconda equazione. Paragonisi colla prima, e ne verranno le determinazioni $n=BE=0$, onde $AB=AE$, cioè $m=e$. Parimente $s=DC=-a$, $r=AD=-b$, e $rs-mz=-ab$, ovve=

ro sostituendo i valori trovati r, s, si fa $ab-mp=-ab$ ovvero $2ab=mp$: E' lecito dunque porre $m=CK=a$, $p=KH=b$: dalle quali determinazioni ne nasce codesta costruzione.

AP sia la linea delle ascisse, a cui si applichi in qualunque angolo $AD=b$, indi parallela ad AP sia $DC=a$, le quali due linee si conducono al contrario per essere esse negative; di poi condotta CZ parallela ad AD, producasi AD in H, sicchè AH sia eguale ad AD, e tra gli assintoti CZ, CD descrivasi una iperbola, che passi per il punto A, questa sarà il luogo cercato, ed AP, PM saranno le coordinate corrispondenti alla data equazione.

Proviene la medesima costruzione, se la comparazione si faccia colla seconda delle equazioni della prop. VI. Imperciocchè ne risulterà $n=BE=0$ e perciò $AB=AE$, ovvero $m=e$, $s=DC=-b$, $r=AD=-a$, e $rs-mp=-ab$, ovvero $2ab=mp$; si può dunque porre $m=2b$, $p=a$. Le quali determinazioni esiggono una tal costruzione. Fig.^a 14.^a, 25.^a

Sia AP la linea delle ascisse; pongasi $AD=a$, e $DC=b$ verso quella parte indicata dal valor negativo: prendasi $DK=DC$; indi parallele a DP si conducano $KH=DA$, e la indefinita CZ, e tra gli assintoti CK, CZ descrivasi una iperbola, che passi per il punto A, questa sarà il luogo cercato. Codesta costruzione è conforme affatto alla precedente.

Esempio 2.° Sia proposta l'equazione $xy-\frac{ax^2}{b}-by+ax+a^2-b^2=0$, la quale, poichè Fig.[a] 13.[a], 26.[a]

contiene il quadrato x^2 devesi confrontare colla prima della prop. VI. Dalla comparazione dunque de' termini si troveranno le equazioni $\frac{n}{m}=\frac{a}{b}$: si può dunque porre $n=BE=a$, $m=AB=b$: onde ancora $e=AE$ resta determinata. Di più si hà $\frac{ms}{e}=b$, ovvero $\frac{bs}{e}=b$, cioè $s=DC=e$; $\frac{ns}{e}-v=a$ ovvero $\frac{ae}{e}-v=a$, onde proviene $v=AD=o$. Finalmente $\frac{mvs}{e}-mp=a^2-b^2$, e cancellato il primo termine, che si moltiplica per $v=o$, averàssi $mp=b^2-a^2$: dunque $p=\frac{b^2-a^2}{b}$. Eccone la costruzione.

Nella linea delle ascisse AP prendasi $AB=b$, e in qualunque angolo si applichi $BE=a$, e congiungasi AE: queste poi si producano d'ambe le parti. Si prenda $EH=b$, $AK=\frac{b^2-a^2}{b}$, la quale sia parallela a BE; poi trà gli assintoti EL, EH descrivasi una Iperbola, che passi per il punto K: questa sarà il luogo cercato, ed AP, PM saranno le coordinate.

Scolio. Se $b<a$, allora il valore della retta AK sarebbe negativo; perciò dall'altra parte si dovria porre l'AK come in Ak, e trà gli assintoti EH, EB s'averebbe a descrivere l'iperbola, che passi per il punto k. Che se $a=b$, allora il valore AK sarebbe nullo, e l'iperbola si confonderebbe cogli assintoti EH, EL: lo che ancora si raccoglie dalla formola analitica. Imperocchè in tale supposizione proviene $xy-x^2-ay+ax=o$;

ovvero $\overline{y-x} \times \overline{x-a} = 0$, dalla quale nascono le due seguenti. 1.ª $y-x=0$, 2.ª $x-a=0$. Il luogo della prima è la retta AEH, dell'altra la retta BEL; il che è manifesto indizio, che nel nostro caso l'iperbola si confonde coi suoi assintoti.

Esempio 3.º Tutti i termini della data equazione $xy + \frac{ay^2}{b} - \frac{b^2x}{a} + \frac{b^2y}{a} = 0$ si confrontino coi termini della 2.ª equazione della prop. VI. e troverassi $\frac{a}{b} = -\frac{n}{m}$: è dunque lecito porre $n = BE = -a$, $m = b = AB$, indi $\frac{ms}{e} = \frac{b^2}{a}$, ovvero $s = DC = \frac{be}{a}$; così $\frac{ns}{e} - r = \frac{b^2}{a}$, ovvero $r = AD = -b \cdot \frac{\overline{a+b}}{a}$: finalmente $\frac{mrs}{e} = mp$, ovvero $p = KH = \frac{-b^2 \cdot \overline{a+b}}{a^2}$. Eccone la costruzione. Fig.ª 14.ª, 27.ª

Faccia $AB = b$ qualunque angolo colla linea delle ascisse AP, e parallella ad AP sia $BE = a$. Prendasi $AD = -b \cdot \frac{\overline{a+b}}{a}$, conducasi DCK parallella ad AE; in essa si assuma $DC = \frac{be}{a}$, e $CK = AB$. si conducano ad AP le parallelle CL, HK, la quale facciasi $= -\frac{b^2 \cdot \overline{a+b}}{a^2}$: finalmente fra gli assintoti CK, CL si descriva una iperbola, che passi per il punto H: questa sarà il luogo cercato, ed AP, PM le coordinate.

Prop. XI

Costruire i luoghi di quelle equazioni, in cui il quadrato della metà del coefficiente del piano

è eguale al coefficiente dell'altro quadrato, essendo l'uno d'essi libero d'ogni coefficiente.

L'equazione data si paragoni colla equazione ecumenica alla Parabola, e da questa comparazione vedasi di determinare i valori m, n, r, s, p, i quali determinati si averà l'intento.

Esempio IVo. Sia proposta l'equazione Fig.a 8.a; 28.
$y^2 + xy + \frac{x^2}{4} - 2ay + 2bx - 2ab = 0$. Si faccia il confronto colla universale equazione della Parabola, e troverassi $\frac{2n}{m} = -1$: onde è lecito porre $n = BE = -\frac{1}{2}$, $m = AB = 1$: dalle quali determinazioni si determina ancora $AE = e$. Inoltre $r = AD = a$, e così $\frac{2mr}{n} - \frac{ep}{m} = 2b$, ovvero trasportati i termini $\frac{ep}{m} = \frac{2mr}{n} - 2b$, ed introdotti i valori già trovati $ep = -a - 2b$, ovvero $p = CH = \frac{-a-2b}{e}$. Finalmente $r^2 + ps = -2ab$, oppure $r^2 + 2ab = -ps$, ed introdotti i valori trovati $a^2 + 2ab = \frac{\overline{a+2b}}{e} \cdot s$, ovvero $ae = s = DC$. Da queste determinazioni ne nasce codesta costruzione.

Prendasi ad arbitrio qualunque AB, a cui si connetta in qualunque angolo $BE = \frac{AB}{2}$, e congiungasi AE. $AB = m$, $BE = n$, $AE = e$. Si è condotta la BE al di sotto della linea AB, perchè il valore della quantità n è negativo. Parallela a BE si conduca la retta $AD = r = a$, in-

di parallela ad AE si conduca la DG $= s = ae$, e ad AD sia parallela la retta CH $= \frac{a+2b}{e}$; poi col vertice C, param.° CH, diam.° CD si descriva la parabola CM, la quale deve giacere dalla parte sinistra, perchè il valore del param.° proviene negativo; sarà questa il luogo cercato, ed AP le ascisse, PM le ordinate della nostra equazione.

Esempio 2.° $y^2 - \frac{2axy}{b} + \frac{a^2x^2}{b^2} - ax - a^2 = 0$ Fig.a 8.a 29.a

è l'equazione data, i termini della quale, se si paragonano colla equazione alla parabola, si troverà $\frac{n}{m} = \frac{a}{b}$, ovvero $n =$ BE $= a$, $m =$ AB $= b$; così pure $r =$ AD $= 0$, e $\frac{2nr}{m} - \frac{ep}{m} = -a$, ovvero $p = \frac{ab}{e} =$ CH. Finalmente $r^2 + ps = -a^2$, ovvero $s =$ DC $= -\frac{a^2}{p} = -\frac{ae}{b}$.

Costruzione. Nella linea delle ascisse prendasi AB $= b$, e in qualunque angolo conducasi BE, e congiungasi AE $= e$. Produci EA in C fino che AC $= s = -\frac{ae}{b}$: questo poi si assume dalla parte sinistra per essere il valore della quantità s negativo. CH sia $= p = \frac{ab}{e}$, e sia parallela a BE: Col vertice C, param.° CH, diam.° CAE descrivasi la parabola CM, che sarà il luogo cercato, ed AP, PM saranno le coordinate corrispondenti alla data equazione.

Le medesime costruzioni affatto proveniranno, se si farà la comparazione colla seconda equazione ecumenica della Parabola, siccome apparirà a chi vorrà farne la esperienza.

Prop. XII

Costruire quelle equazioni, nelle quali liberato da ogni coefficiente il quadrato y^2, il coefficiente dell'altro quadrato x^2 è maggiore del quadrato della metà del coefficiente del piano xy.

Queste, come è chiaro per le cose dette, si devono paragonare colla equazione ecumenica alla Ellisse.

Esempio 1.mo $y^2 - xy + x^2 - ay + ax - a^2 = 0$.

Se si faccia la comparazione colla equazione alla Ellisse, si troverà $\frac{2n}{m} = 1$, ovvero $n = BE = \frac{1}{2}$, $m = AB = 1$, ed $AE = e$ resta determinata. Così ancora $\frac{n^2}{m^2} + \frac{e^2 p}{2m^2 t} = 1$, ovvero $\frac{1}{4} + \frac{e^2 p}{2t} = 1$; sarà dunque $\frac{p}{2t} = \frac{3}{4e^2}$; $r = AD = \frac{a}{2}$. Parimente Fig.ª 10.ª

$\frac{2nr}{m} - \frac{2eps}{2mt} = a$, oppure $\frac{a}{2} - a = -\frac{a}{2} = \frac{3s}{2e}$;

e perciò $s = -\frac{ea}{3}$. Finalmente $r^2 - \frac{pt^2}{2t} + \frac{ps^2}{2t} = -a^2$,

ovvero $\frac{a^2}{4} - \frac{3 \cdot t^2}{4e^2} + \frac{3}{4e^2} \cdot \frac{e^2 a^2}{9} = -a^2$, dalla quale ridotta si ricava $t = CK = \frac{4ae}{3}$, onde viene ad essere $p = KH = \frac{2a}{e}$. onde nasce la seguente costruzione.

Nella linea delle ascisse AP prendo $AB = 1$, la quale considero come unità; ergo in qualunque angolo $BE = \frac{a}{2}$, e congiungo $AE = e$. Metto AD eguale e parallela a BE, e conduco CDK parallela ad AE. Poichè il valore DC è negativo

assumo dalla parte sinistra $DC = \frac{ea}{3}$. Prendo $CK = CL = \frac{4ae}{3}$, ed HK parallela a BE $= \frac{2a}{e}$: finalmente col Diam.° LK, param.° HK descrivo una Ellisse. questa sarà il luogo cercato, ed AP saranno le ascisse, PM le ordinate.

Esempio 2.° Sia proposta l'equazione $y^2 + \frac{axy}{b} + \frac{2a^2x^2}{b^2} - ab = 0$. Questa paragonata colla equazione ecumenica alla Ellisse dà $\frac{a}{b} = -\frac{2n}{m}$: facciasi dunque $n = BE = -\frac{a}{2}$, $m = AB = b$. Inoltre $\frac{n^2}{m^2} + \frac{e^2p}{2m^2t} = \frac{2a^2}{b^2}$, ouvero $\frac{a^2}{4b^2} + \frac{e^2p}{2b^2t} = \frac{2a^2}{b^2}$, ouvero $\frac{p}{2t} = \frac{7a^2}{4e^2}$. Così pure $r = 0$, $\frac{2nr}{m} - \frac{2eps}{2mt} = 0$, oppure $s = 0$. Finalmente $r^2 - \frac{pt^2}{2t} + \frac{ps^2}{2t} = -ab$, oppure $\frac{p}{2t} \cdot t^2 = ab$, cioè $t^2 = \frac{4e^2ab}{7a^2}$, ed estratta la radice sarà $t = 2e\sqrt{\frac{b}{7a}} = CK$; e infine $p = \frac{4e\sqrt{b}}{\sqrt{7a}} \times \frac{7a^2}{4e^2}$ $= \frac{a\sqrt{7ab}}{e}$.

Queste determinate in tal maniera il luogo si costruisca: Nella linea delle ascisse prendasi $AB = b$, abbassa in qualunque angolo $BE = \frac{a}{2}$, che al di sotto si conduca, per essere negativo il suo valore: congiungi $AE = e$, e in essa prendi $AK = AL = \frac{2e\sqrt{b}}{\sqrt{7a}}$. Parallela a BE sia $KH = \frac{a\sqrt{7ab}}{e}$. Col diam.° LK, param.° KH descrivi una Ellisse; ella sarà il luogo cercato. Fig.^{a} 10.^{a} 31.^{a}

Prop. XIII

Costruire quelle equazioni, nelle quali liberato da ogni coefficiente il quadrato y^2, il coefficiente dell' altro quadrato x^2 è minore della metà del coefficiente del piano xy.

I termini della data equazione si devono confrontare coi termini della equazione canonica della Iperbola riferita ai diametri, e da questa comparazione si determineranno i valori. Il segno poi ambiguo $\pm$, che s'attrova nella equazione devesi determinare in maniera, che si scansino le quantità imaginarie. Se si hà da prendere il segno superiore, l'Iperbola si riferirà al primo diam.° ; al secondo poi se bisogni servirsi dell'inferiore.

Esempio 1.mo Sia proposta l'equazione $y^2+3xy-x^2+ax-aa=0$; la quale se si paragoni coi termini della equazione Iperbolica, troveranno queste determinazioni $-\frac{2n}{m}=3$: onde $n=-3$, $m=2$ $=BE$, la quale per avere il segno negativo deve essere condotta dalla parte inferiore, e deve essere a BA in proporzione di $3:2$: donde determinato l'angolo B, sarà determinata $AE=e$. Così pure $\frac{n^2}{m^2}-\frac{e^2}{2m^2t}=-1$, da cui proviene $\frac{e}{2t}=\frac{13}{e^2}$. Parimente $r=AD=\frac{a}{2}$, e $\frac{2nr}{m}+\frac{2ees}{2mt}=a$, onde nasce $s=DC=\frac{5ae}{26}$. Finalmente $r^2\pm\frac{pt^2}{2t}-\frac{ps^2}{2t}=0$. onde viene ad essere $t=$ ~~ba~~ $ae\sqrt{\frac{63}{13\cdot 398}}$, e quindi $p=KH=\frac{13a}{e}\sqrt{\frac{126}{319}}$.

Fig.ª 11.ª

Si avverta, che noi abbiamo preso il segno superiore per tener lontane le quantità immaginarie, e che perciò l'equazione deve essere riferita al primo diam.º Eccone la costruzione.

Nella linea delle ascisse presa qualunque AB, conducasi in qualunque angolo BE, che stia ad essa come 3 : 2. Si congiunga AE. Sia AD parallela a BE ed $= \frac{a}{2}$; si conduca DS parallela ad AE, in cui si tagli $DC = \frac{5ae}{26}$: indi $CK = CL = 2e\sqrt{\frac{63}{13 \cdot 398}}$, e col centro C, coi vertici K, L, coi param.º $KH = \frac{13a}{e}\sqrt{\frac{126}{319}}$ si descriva una iperbola; questa sarà il luogo cercato, ed AP saranno le ascisse, PM le ordinate della nostra equazione.

Esempio 2.º Sia proposto da costruire Fig.ª 12.ª 33.ª il luogo della equazione $y^2 - \frac{2bxy}{a} - \frac{7b^2x^2}{a^2} - 2ay + 8bx + 2a^2 = 0$. Fatta la comparazione troverassi $-\frac{2n}{m} = -\frac{2b}{a}$; onde $n = b$, $m = AB = a$. Di poi $\frac{n^2}{m^2} - \frac{e^2 p}{2m^2 t} = -\frac{7b^2}{a^2}$, onde averassi $\frac{p}{2t} = \frac{8b^2}{e^2}$. Di più $r = AD = 6a$. Così pure $\frac{2nr}{m} + \frac{2eps}{2mt} = 8b$, che dà $s = DC = -\frac{ae}{4b}$. Finalmente $r^2 \pm \frac{p}{2t} \cdot f^2 - \frac{ps^2}{2t} = 2a^2$, onde si ricava $\frac{67a^2e^2}{16b^2} \pm f^2 = 0$, nella quale per tener lontane le quantità immaginarie si deve prendere il segno inferiore; il che indica, doversi riferire l'iperbola al secondo diam.º Preso dunque il segno inferiore sarà $f = CK = CL = \frac{ae}{4b}\sqrt{67}$;

e perciò $p = KH = \frac{4\,ba\sqrt{67}}{e}$.

Nella linea delle ascisse AP prendasi $AB = a$; in qualunque angolo si conduca $BE = b$, a cui sia parallela $AD = ba$. Alla retta AE per il punto D si conduca una parallela, nella quale si assuma $DC = \frac{ae}{4b}$. Questa si prende a sinistra, perchè si proviene negativa. Si ascinda $CK = CZ = \frac{ae\sqrt{67}}{4b}$, e KH sia $= \frac{4\,ba\sqrt{67}}{e}$. In fine col secondo diam.° ZK, e col param.° KH si descriva una Iperbola, sarà ella il luogo cercato; ed AP saranno le ascisse, PM le ordinate della equazione.

Scolio. Nessuno ormai può aver dubbio, che i luoghi di tutte le equazioni indeterminate del secondo grado non appartengano alle sole sezioni coniche; ed è chiaro il metodo, con cui ciascuno di questi luoghi si può costruire: Mà poichè questo mètodo hà sempre bisogno delle formole ecùmeniche, le quali ne si possono tenere a memoria, ne si possono appresso di se avere sempre in iscritto; perciò sono stati inventati altri metodi, coi quali più agevolmente dalla data equazione si può investigare la natura della curva, a cui appartiene. Questi metodi poi saranno da noi esposti nel Cap.° susseguente.

CAP. VII.

In cui si espongono due altri metodi per la costruzione dei luoghi geometrici del 2.º grado.

Il metodo, che noi abbiamo dichiarato nel cap.º antecedente lo dobbiamo riconoscere da Monsieur Craige uomo dottissimo, che primo di tutti lo produsse insieme con un trattato dei quadrati delle figure curvilinee stampato in Londra l'anno 1693: i suoi seguaci sono, il Marchese de l'Hospital nelle Sezioni coniche, e Cristiano Wolfio nei suoi Elementi d'Analisi. Due altri metodi ora noi esporremo, d'uno dei quali inventore è stato il Signor Giovanni Witt nell'operetta che è stampata nella parte 2.ª della Geometria Cartesiana; e i suoi seguaci sono Guisnè, e de la Hire; e produsse l'altro secondo l'ideà di Cartesio il Sig.r Giacomo Ermanno nell'operetta che si legge nel Tomo 4.º dell'Academia di S. Pietroburgo.

Metodo secondo

Per la costruzione dei luoghi Geometrici.

Questo metodo, del quale io mi servo frequentemente, consiste in questo di trasformare coll'aiuto delle sostituzioni l'equazion data.

nelle primitive equazioni delle sezioni coniche. Le primitive, e semplicissime equazioni delle sezioni coniche noi abbiamo diligentemente notate al Cap.° 4.° Parte pr.ª di questo libro. In che maniera poi ciò si faccia, lo faranno chiaro le proposizioni seguenti: noi principieremo dai luoghi geometrici del primo grado per indi passare a quei del secondo.

Prop. I

Costruire le equazioni indeterminate del primo grado.

Tutto l'artifizio è questo di sostituire opportunamente in vece d'un binomio composto di una indeterminata e d'una costante, un'altra indeterminata, finchè s'arrivi alla equazione semplicissima della linea retta; la quale poi si costruisca; indi si torni indietro servendosi delle medesime sostituzioni, aggiugnendo cioè o levando dalle coordinate della retta linea le quantità costanti, e in tal guisa si troveranno le coordinate della data equazione. La cosa per se non oscura gli esempi la renderanno chiarissima.

Esempio pr.° Sia l'equazione $ax-by+ab=0$ oppure $ax=b\cdot\overline{y-a}$. Si faccia $y-a=u$ e sarà $ax=bu$, di cui tale è la costruzione. Fig.ª 1.ª

Prendasi $CG=b$, $GF=a$ in qualunque angolo, e si conduca CF: è chiaro essere $CN=x$, $MN=u$: mà $y=u+a$ :: Dunque all'ordinata MN si deve aggiungere una retta $=a$ per aver l'y. Perlochè paralella a FG si tiri $CA=a$, e dal punto A si conduca la retta AP paralella a CN, sarà $MP=u+a=y$ essendo CN, o la sua eguale $AP=x$.

In altro modo si può maneggiar la medesima equazione, che si potrà disporre così $a\cdot\overline{x+b}=by$. Si faccia $x+b=z$: Dunque $az=by$, che si costruisce così. Si assuma $DA=b$, $AF=a$, e congiungasi DF: è chiaro essere $DP=z$, $PM=y$. Mà $z-b=x$. Dunque da DP si deve levare la quantità DA perchè s'abbia l'x; e perciò sarà $AP=x$, $PM=y$. Il qual solo esempio abbastanza illustra una cosa per se facilissima e chiara. Fig.ª 3.ª

Prop. II

Costruire quelle equazioni del secondo grado, in cui manca il piano delle coordinate xy.

Questa cosa è facilissima: Imperocchè non si ricerca altro che sostituire una semplice indeterminata in vece d'una indeterminata, e d'una costante, fino che si giunga ad alcuna delle primitive equazioni

delle sezioni coniche, indi descrivere la sezione. finalmente tornando indietro aggiungere, o sottrarre dalle indeterminate quelle quantità costanti, che mostrano le coordinate della equazione. A questo modo sarà costruita la data equazione. Dagli esempi riceverà chiarezza una cosa per se non oscura.

Esempio primo. Sia proposta l'equazione $y^2-2ay-2bx+ab=0$. Perchè s'abbia nella equazione compito il quadrato della quantità $y-a$ aggiungi dall'una e dall'altra parte della equazione il quadrato della metà del coefficiente a^2, e trasporta opportunamente i termini, onde abbiasi $y^2-2ay+a^2=2bx+a^2-ab$. Poni $y-a=u$, e fatta la sostituzione averai $u^2=2b\cdot\overline{x+\frac{a^2-ab}{2b}}$. Fà $x+\frac{a^2-ab}{2b}=z$, e sarà $u^2=2bz$: la quale, come appare, è alla parabola, di cui le ascisse $=z$ si prendono nel diam.°, e le u si ordinano allo stesso diam.°, il cui parametro $=2b$.

Descrivasi pertanto la Parabola MCm colla tangente CH, diam.° CG, il cui parametro $CH=2b$, saranno $CG=z$, $GM=u$: Mà per l'ultima sostituzione $x+\frac{a^2-ab}{2b}=z$: Dunque $x=z+\frac{ab-a^2}{2b}$. Produci dunque GC fino chè fig.a 15.

$CD = \frac{ab-a^2}{2b}$, sarà $DG = x$: Ma per la prima sostituzione $y - a = u$: Dunque $y = u + a$. Dal punto D si tiri $DA = a$ parallella alle ordinate MS, e una indefinita AP parallella al diam.° CG: saranno $MP = y$: Ma $DG = x = AP$. Dunque AP, PM saranno le coordinate della data equazione. Questa costruzione conviene affatto con quella che noi abbiamo esposto nel precedente Cap.° Prop. VII, Esempio primo.

Esempio 2.° Sia l'equazione proposta $y^2 + x^2 - 2by + 2ax + b^2 = 0$. Si faccia $y - b = u$, poichè il quadrato di questa quantità è completo nella equazione, e fatta la sostituzione sarà $u^2 + x^2 + 2ax = 0$. Si aggiunga a ciascuna parte della equazione il quadrato a^2, e posta $x + a = z$, sarà $u^2 + z^2 = a^2$, la quale equazione ognun vede appartenere al circolo se le coordinate insistano ad angoli retti, altrimente alla Ellisse; le ascisse cominciano nel centro, e il diam.° è $= 2a$.

Col diam.° $ZK = 2a$, e con eguale param.° si descriva o un cerchio, o una Ellisse ZMK il cui centro G: saranno $GS = z$, $SM = u$: ma perchè $x = z - a$, se le x cominciano in K non averanno alcuna ordinata prese positivamente; prese poi negativamente, come in KG ne averanno due, una di esse SM Fig.ª 20.ª

positiva, l'altra negativa Sm. Mà poichè $y = u + b$, parallella alle ordinate si conduca $KA = b$, e si tiri PAp parallella al diam.° Saranno KS, ovvero Ap le ascisse negative, PM, pm le ordinate della nostra equazione. La quale equazione è la medesima con quella, che noi abbiamo dedotto dal primo metodo nel Cap.° precedente prop. VIII. esempio primo.

Esempio 3.° Sia $y^2 - x^2 - 2by + 2ax + b^2 = 0$. Si faccia $y - b = u$, e fatta la sostituzione sarà $u^2 - x^2 + 2ax = 0$, ovvero $u^2 = x^2 - 2ax$. S'aggiunga d'ambe le parti a^2, e proverrà $u^2 + a^2 = x^2 - 2ax + a^2$. Si ponga $x - a = z$, e troverassi $u^2 + a^2 = z^2$: la quale equazione è all' iperbola equilatera, se le coordinate insistono ad angoli retti; altrimente a un'altro genere d'iperbola. Le ascisse cominciano nel centro, e si prendono nel primo diam.°, la cui metà $= a$.

Col diam.° $DK = 2a$, e con param.° eguale HK si descriva l'Iperbola KM, il cui centro sarà C che divide bifaria DK. Fig.^{a} 22.^{a}
$CS = z$, $SM = u$; ma perchè $x = z + a$, saranno $= DS$; $y = u + b$; dal punto D parallella alle ordinate si abbassi $DA = b$, e si conduca AP parallella al diam.°, saranno $PM = y$,

e $AP = DS = x$. La qual costruzione noi abbiamo ancora cavata dal primo metodo del Cap.° precedente. prop. IX, esempio primo.

Esempio 4.° Sia proposta l'equazione $x^2 - 2ax + \overline{a-b}\cdot y + b^2 = 0$; a ciascuna parte della equazione si aggiunga il quadrato a^2, e si compia nella equazione il quadrato della quantità $x-a$, la quale farai $= z$ affinche fatta la sostituzione si possa trovare $z^2 + \overline{a-b}\cdot y + b^2 = a^2$, oppure $z^2 = \overline{a-b}\cdot\overline{a+b-y}$. Pongasi $a+b-y = u$, e sarà $z^2 = \overline{a-b}\cdot u$, la quale equazione è alla parabola; il param.° del diam.° a cui si riferisce $= a-b$; le ascisse z si prendono nella tangente, le ordinate si conducono parallele al diam.°

Nella costruzione si devono tre casi distinguere: primo quando $a=b$, nel qual caso si farà $z=0$, e perciò $x=a$; la quale equazione spetta alla linea retta.

Caso 2.° quando $a>b$, e il parametro $a-b$ è positivo. Colla tangente CS, e Fig.e 18.a
22.° col diametro CD in qualunque angolo SCD col parametro del diam.° $CH = a-b$ si descriva una parabola CM, saranno $CS=z$, SM parallele al diam.° $= u$. Ma $y = a+b-u$: Dunque tagliata $CD = a+b$, e condotta DP parallela alla tangente, e prodotte SM in P

saranno $PM = y$. Ma $x = z + a$: Dunque, prodotta DP in A fino che $AD = a$, saranno $AP = x$; e perciò AP, PM le coordinate della data equazione.

Caso 3.° Se $a < b$, ed $a - b$ quantità negativa, col parametro negativo $a - b$ descritta la parabola CM, le ordinate MS parallele al diam.° troveranno negative, e saranno $= y - a - b$: Dunque fatta $CD = a + b$, e condotta DP parallela alla tangente, saranno $MP = a + b - u = y$, $DP = z$, si aggiunga $DA = a$: saranno $AP = x$. Veggasi la costruzione di questa equazione dedotta dal primo metodo nel Cap.° precedente, prop. VII. esem. 3.°, la quale colla ora insegnata è affatto conforme. Fig.ª 17.ª

Esempio 5.° Sia proposta l'equazione $y^2 + 2x^2 - 2ay + 2bx + b^2 = 0$. Si aggiunga il quadrato a^2, e posto $y - a = u$, sarà sostituendo $u^2 + 2x^2 + 2bx + b^2 = a^2$. Si divida per 2, e in tal maniera dispongasi l'equazione $\frac{u^2}{2} + x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{4}$. Fà $x + \frac{b}{2} = z$, e sarà $\frac{u^2}{2} + z^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{4}$, ovvero $\frac{u^2}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{4} - z^2$, cioè $\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{4} - z^2 : u^2 :: 1 : 2 :: \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{4} : a^2 - \frac{b^2}{2}$. la quale equazione è dell'Ellisse riferita al diam.°, la cui metà $= \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{4}}$, e il semidiam.° coniugato $= \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{2}}$.

Coi semidiametri $CK=\sqrt{\frac{a^2}{2}-\frac{b^2}{4}}$, Fig.ª 20.ª

$CQ=\sqrt{a^2-\frac{b^2}{2}}$ concorrenti in qualunque an=golo si descriva una Ellisse LQK: saranno $CS=z$, $SM=u$: Mà $z-\frac{b}{2}=x$: Dunque tagliata $CD=\frac{b}{2}$, saranno $DS=x$, così pure $u+a=y$: Dunque alla retta CQ si conduca parallella $DA=a$, e parallella a CK si tiri Ap, sarà $pM=y$; e perciò DS, ovvero Ap, e pM saranno le coordinate cercate della nostra equazione.

Se, o $a=\frac{b}{\sqrt{2}}$, o $a<\frac{b}{\sqrt{2}}$, ogni cosa verrebbe immaginaria. Tutto ciò conviene colla costruzione esposta nella prop. VIII, esemp. 3.º del Cap.º precedente.

Esempio 6.º Sia l'equazione

$y^2-\frac{ax^2}{b}+2ax-3ab=0$, ovvero

$\frac{by^2}{a}-2b^2=x^2-2bx+b^2$. Facciasi $x-b=z$,

e sarà $\frac{by^2}{a}-2b^2=z^2$, oppure

$z^2:y^2-2ba::b:a::2b^2:2ba$: la quale equazione è alla Iperbola riferita ai secondi diam.i la cui metà $=b\sqrt{2}$, e il semidiam.o suo conjugato $=\sqrt{2ba}$

Il primo diam.o $CQ=2\sqrt{2ba}$ faccia col secondo $CK=2b\sqrt{2}$ qualunque angolo, e con quelli si descriva l'iperbola OQM saranno $CP=z$, $PM=y$: mà perchè Fig.ª 23.ª

$x = z + b$ alle ascisse CP si aggiunga la costante $CA = b$, saranno $AP = x$, $PM = y$ che convengono alla equazione proposta.

Prop. III

Costruire quelle equazioni, che contengono il piano xy mancando però i quadrati x^2, y^2.

Nella stessa maniera affatto per via di sostituzioni si maneggi l'equazione fino che si venga all'equazione semplicissima della Iperbola riferita agli assintoti; poiché a questa sono sempre riducibili tali equazioni.

Esempio. Sia $xy + ay + bx - ab = 0$. Pongasi $x + a = z$: Dunque $x = z - a$: i quai valori sostituiti nascerà $zy + bz - ba - ba = 0$. Sia $y + b = u$, e sarà $zu = 2ba$, la quale equazione è alla iperbola trà gli assintoti.

Presa $CD = a$, $DH = 2b$ in qualunque angolo, e da C condotta CL parallela a DH, trà gli assintoti CL, CD si descriva una Iperbola che passi per il punto H, saranno $CS = z$, $SM = u$; ma perchè $x = z - a$, e $CD = a$; perchè poi $y = u - b$, si divida DH per metà in A, e parallela all'assintoto CS per il punto A si conduca AP, sarà $MP = u - b = y$: Dunque DS, ovvero AP, e PM le coordinate della equazione. Fig. 4.

Prop. IV

Costruire quelle equazioni, in cui col piano xy v'hà luogo o uno, o ambidue i quadrati x^2, y^2.

Queste costruzioni richiedono maggiore industria ed artifizio. Imperciocchè non solamente si deve sostituire un'altra indeterminata in vece del binomio composto d'una indeterminata, e d'una costante; ma ancora in vece d'un binomio composto di due variabili, o d'un trinomio composto di due variabili e d'una costante per fino che si giunga alla primitiva equazione di qualche sezione: la quale costruita per mezzo d'un triangolo in un angolo dato si deve levare, o aggiungere alle ordinate quella variabile, che mostrano le sostituzioni già poste.

Con molti esempi renderemo il metodo chiaro.

Esempio primo. Sia proposta l'equazione semplicissima $x^2 + yx = a^2$. Si faccia $x + y = u$: Sarà dunque $xu = a^2$ la quale è la primitiva equazione della Iperbola trà gli assintoti.

Si taglino in qualunque angolo CL, CB, e in una di esse prendasi $CB = a$, e parallella all'altra si conduca $BE = a$, e trà gli assintoti CL, CB si descriva una Iperbola, Fig.ª 34.ª

che passi per il punto E, saranno $CP = x$, $PM = u$.
ma perchè $y = u - x$, da PM si deve detrarre
una linea = CP per aver l'y. Perciò dal pun-
to C si conduca CE, che farà con CB un'
angolo eguale a BEC, laonde sarà $GP = CP$:
Dunque $GM = u - x = y$; Perlochè le variabili
x della nostra equazione saranno rappresentate
da CP, le indeterminate y saranno espresse da
GM intercetta frà l'Iperbola, e la linea CE.

In altra maniera ancora si può ma-
neggiare l'equazione proposta. Aggiungasi cioè
a ciascuna parte della equazione il quadrato
$\frac{y^2}{4}$, e sarà $x^2 + yx + \frac{y^2}{4} = a^2 + \frac{y^2}{4}$. Si faccia
$x + \frac{y}{2} = z$, e sarà $z^2 = a^2 + \frac{y^2}{4}$, cioè
$z^2 - a^2 : y^2 :: 1 : 4 :: a^2 : 4a^2$, che è all'Iper-
bola, il cui semid.° primo $= a$, secd.° $= 2a$; e
le ascisse z cominciano nel centro.

Presa $LK = 2a$, che si tagli bifaria Fig. 3
in C si conduca in qualunque angolo $CQ = 2a$,
indi coi semidiam.i CK primo, CQ secd.° si
descriva l'Iperbola KM: saranno $CP = z$, $PM = y$.
ma perchè $x = z - \frac{y}{2}$ da CP si deve sottrarre
la metà di PM per aver la x. Si conduca
LQ, a cui sia parallella MN saranno simili i
triangoli LCQ, MPN: Dunque siccome LC è
la metà di CQ, così NP è la metà di PM: Dun-

que $CN = z - \frac{y}{2} = x$.

Ma perchè non siamo sforzati a condur nove paralelle alla retta QR, per ciascun punto M, basterà condurre per il centro C la CE parallela a QR, indi tirate MN paralelle a CK, CR esprimeranno le y, e M le x.

Scolio. Da questo esempio apparisce essere più commodo servirsi di tale sostituzione che più tosto tenga lontane dalla equazione le ordinate y che le ascisse x. Se si facesse altrimente per evitar l'incommodo di condur nove linee per ciascun punto, sarebbe necessario mutare le ascisse nelle ordinate, e così al contrario.

Esempio 2°. Sia proposta l'equazione $xy - \frac{ax^2}{b} - by + ax + a^2 - b^2 = 0$. Si faccia $y - \frac{ax}{b} = u$, e perciò $y = u + \frac{ax}{b}$. Fatte queste sostituzioni nasce $xu - bu - ax + ax + a^2 - b^2 = 0$. Si faccia di nuovo $x - b = z$, e sarà $zu = b^2 - a^2 = 0$; la quale è una equazione all'iperbola frà gli assintoti.

Si prenda $CB = b - a$, in qualunque angolo conducasi $BE = a + b$, e condotta ad essa la parallela CK, frà gli assintoti CK, CB si descriva una iperbola, che passi per il punto E, saranno $CP = z$, Fig.ª 36.ª

$PM = u$, ma perchè per la seconda sostituzione $x = z + b$ si ascinda $CD = b$, e sarà $DP = x$; e per la prima $y = u + \frac{ax}{b}$, deversi aggiungere alla retta MP una linea, che abbia a DP la stessa ragione che ha $a : b$: tagliata dunque nell'assintoto $CF = a$ si congiunga DF; prodotta MP a S è chiaro essere $DC : CF :: DP : PS$, ovvero analiticamente $b : a :: x : \frac{ax}{b} = PS$. Dunque $MS = u + \frac{ax}{b} = y$; e perciò se DP esprimono le ascisse x, MS rappresenteranno le ordinate y.

Se b fosse minore di a, allora $CB = b - a$ sarebbe quantità negativa, e quindi presa ella dall'altra parte indicherebbe doversi descrivere l'Iperbola dentro l'angolo LCD.

Esempio 3.° Sia proposta da costruirsi l'equazione $y^2 + xy + \frac{x^2}{4} - 2ay + 2bx - 2ba = 0$. Si aggiunga ad ambe le parti $-ax + a^2$, e sarà $y^2 + xy - 2ay + \frac{x^2}{4} - ax + a^2 + 2bx - 2ba = -ax + a^2$. Si faccia $y + \frac{x}{2} - a = u$, e sarà $u^2 + 2bx - 2ba = -ax + a^2$, ovvero $u^2 = \overline{2b + a} \cdot \overline{a - x}$. Poni $a - x = z$, e sarà $u^2 = \overline{2b + a} \cdot z$, la quale equazione è alla parabola, il param.° del cui diam.° $= 2b + a$.

Si descriva pertanto la Parabola col diam.° CE, che faccia qualunque angolo colle ordinate, e Fig.ª 27

il cui param.° sia $= 2b + a$, saranno $QE = z$, $QM = u$: mà perchè $x = a - z$, si ascinda $CE = a$, saranno $EQ = a - z = x$. Mà poichè $y = u + a - \frac{x}{2}$, alle ordinate QM si deve prima aggiungere una quantità costante $= a$, e poi levare la metà della ascissa $\frac{EQ}{2}$. Parallela alle ordinate si conduca la retta $ED = a$, e DA paralella al diam.°, saranno $DP = x$, $PM = u + a$. Condotta la tangente CA, fino che concorra con DA in A, questa si divida per mezzo in F, e si congiunga DF, sarà $DA : AF :: DP : PS$,

ouvero $a : \frac{a}{2} :: x : \frac{x}{2}$:

Dunque $SM = u + a - \frac{x}{2} = y$.

Esempio 4.° Sia l'equazione $y^2 - xy + x^2 - ay + ax - a^2 = 0$. Per avere il quadrato completo della quantità $y - \frac{a}{2} - \frac{x}{2}$, dispongasi l'equazione così

$$y^2 - y \cdot \overline{x + a} + \frac{x^2}{4} + \frac{ax}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{3x^2}{4} + \frac{ax}{2} - \frac{5a^2}{4} = 0$$

Si faccia $y - \frac{a}{2} - \frac{x}{2} = u$, e sarà

$u^2 + \frac{3x^2}{4} + \frac{ax}{2} - \frac{5a^2}{4} = 0$ Si moltiplichi per $\frac{4}{3}$

e proverrà $\frac{4u^2}{3} + x^2 + \frac{2ax}{3} - \frac{5a^2}{3} = 0$, ouvero

$\frac{4u^2}{3} + x^2 + \frac{2ax}{3} + \frac{a^2}{9} - \frac{16a^2}{9} = 0$. Poni $x + \frac{a}{3} = z$

ed averai $\frac{4u^2}{3} + z^2 - \frac{16a^2}{9} = 0$, oppure

$\frac{16a^2}{9} - z^2 : u^2 :: 1 : \frac{3}{4} :: \frac{16a^2}{9} : \frac{4a^2}{3}$ la quale

equazione è all'Ellisse, il cui semidiam.° $= \frac{4a}{3}$ e il suo conjugato $= \frac{2a}{\sqrt{3}}$ cominciando nel centro le ascisse x.

Con questi semidiam.i dunque CK, CQ concorrenti in qualunque angolo si descriva la Ellisse QQK, saranno $CR = z$, $RM = u$: ma è $x = z - \frac{a}{3}$; prendasi dunque $CB = \frac{a}{3}$, sarà $BR = x$. Così pure è $y = u + \frac{a}{2} + \frac{x}{2}$. Dal punto B parallela a CQ si conduca $BA = \frac{a}{2}$, e AP parallela a CK; sarà $PM = u + \frac{a}{2}$: si ascinda $DB = a$, e si conduca DAS, e si produca PM in S. Per la similit.e de' triangoli, siccome BA è la metà di DB, così SP sarà la metà di AP: Dunque $SM = u + \frac{a}{2} + \frac{x}{2} = y$. Fig.a 38.a

Esempio 5.° Sia l'equazione proposta $y^2 + \frac{axy}{b} + \frac{2a^2x^2}{b^2} - ab = 0$. Perchè sia completo il quadrato della quantità $y + \frac{ax}{2b}$ così dispongasi la data equazione $y^2 + \frac{axy}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2} + \frac{7a^2x^2}{4b^2} - ab = 0$. Pongasi $y + \frac{ax}{2b} = u$, sarà $u^2 + \frac{7a^2x^2}{4b^2} - ab = 0$, ovvero $\frac{4b^2u^2}{7a^2} = \frac{4b^3}{7a} - x^2$, cioè

$\frac{4b^3}{7a} - x^2 : u^2 :: \frac{4b^3}{7a} : ab$; la quale appartiene all'Ellisse, la cui costruzione è tale.

Condotte in qualunque angolo $CK = \frac{2b\sqrt{b}}{\sqrt{7a}}$, $CQ = \sqrt{ab}$, con queste come semidiam.i si descriva Fig.a 39.a

l'Ellisse LQK, saranno $CP=x$, $PM=u$: mà abbiamo $y=u-\frac{ax}{2b}$: Dunque per aver la y si deve sottrarre da PM la linea PS, che sia a CP in ragion data di $a:2b$. Si ascinda dunque CA, che abbia a CQ la medesima ragione di $2b:a$, e si conduca QA, a cui per il punto C sia parallela CS: sarà per la similitudine de' triangoli $AC:CQ::CP:PS$, ovvero analiticamente $2b:a::x:\frac{ax}{2b}$. Dunque $SM=u-\frac{ax}{b}=y$.

Esempio 6.° $y^2+3xy-x^2+ax-ay=0$ è l'equazione da costruirsi. Si disponga essa in questo modo.

$$y^2+y\cdot\overline{3x-a}+\frac{9x^2}{4}-\frac{3ax}{2}+\frac{a^2}{4}-\frac{13x^2}{4}+\frac{5ax}{2}-\frac{a^2}{4}=0.$$

Si faccia $y+\frac{3x}{2}-\frac{a}{2}=u$, e proverrà $u^2-\frac{13x^2}{4}+\frac{5ax}{2}-\frac{a^2}{4}=0$, ovvero moltiplicando per $\frac{4}{13}$, e trasponendo

$$\frac{4u^2}{13}=x^2-\frac{10ax}{13}+\frac{a^2}{13}=x^2-\frac{10ax}{13}+\frac{25a^2}{169}-\frac{12a^2}{169}.$$

Nuovamente si faccia $x-\frac{5a}{13}=z$, e si averà l'equazione $\frac{4u^2}{13}=z^2-\frac{12a^2}{169}$; oppure $z^2-\frac{12a^2}{169}:u^2::\frac{12a^2}{169}:\frac{3a^2}{13}$, che è all'Iperbola.

Col primo diam.° $=\frac{2a\sqrt{3}}{13}$, e col secdo $CQ=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$ in qualunque angolo Fig.^{a} 40.^{a}

concorrenti si descriva una Iperbola KM, saranno $PR = z$, $RM = u$: ma perchè $x = z + \frac{5a}{13}$, si tagli $CA = \frac{5a}{13}$, sarà $AR = z + \frac{5a}{13} = x$: Di poi, poichè $y = u + \frac{a}{2} - \frac{3x}{2}$, alle ordinate RM si deve aggiungere primieramente una costante $\frac{a}{2}$: di poi s'ha da levare una quantità, che a x sia in ragione di $3:2$: Perciò dal punto A parallella alle ordinate si conduca $AD = \frac{a}{2}$, e parallella al diam.° si conduca DP, sarà $MP = u + \frac{a}{2}$. Si ascinda $BD = \frac{a}{3}$, e si conduca BA, a cui sia parallella DS. Per la similitudine de' triangoli BDA, DPS, sarà $BD : DA :: DP : PS$, ovvero analiticamente $\frac{a}{3} : \frac{a}{2} :: x : \frac{3x}{2}$. Dunque $MS = u + \frac{a}{2} - \frac{3x}{2} = y$.

Scolio. Il metodo di costruire le equazioni insegnato in questa proposizione è vizioso in questo, che le ordinate non terminano nella linea delle ascisse; ma o a quella non arrivano o oltre d'essa trascorrono. A questo incommodo fa d'uopo porre rimedio.

Prop. V

Costruire le medesime equazioni, in cui col piano xy si contiene o uno, o ambidue i quadrati x^2, y^2 in maniera che le ordinate insistano alle ascisse, e terminino in quelle.

L'artificio, con cui ciò si ottiene, non si può spiegare così facilmente senza esempi. Imperocchè gli angoli delle ordinate colle assisse si devono determinare in guisa, che la linea, che fà un angolo determinato col diametro divenga eguale alla parte corrispondente del diam.° o ad una sua parallella, onde in vece di quella si possa sostituire. Gli esempi renderanno chiara la cosa.

Esempio 1.° Io mi proponerò da costruire quelle equazioni medesime, che sono nella proposizione precedente, di cui la prima si è $x^2+xy=a^2$. Questa equazione nella superior proposizione fù primieramente costruita così. Cogli assintoti CZ, CB poste CB=BE=a è stata descritta l'iperbola ME, e condotta CE era CP=x, MS=y. Se dunque sarà da per tutto CP=CS, sarà ancora CS=x, ed averemo le ordinate MS insistenti alle ascisse CS. Per aver questo è necessario, che sia CE=CB. Dunque il triangolo CEB doverà essere equilatero. Ma l'angolo ZCE=CBE. Dunque l'angolo ZCB doppio dell'angolo d'un triangolo equilatero; e perciò se si descriverà l'iperbola con queste condizioni trà gli assintoti CZ, CB concorrenti in un'angolo doppio dell'angolo d'un triangolo equilatero, sarà CB=CE, e quindi CP=CS=x, Fig.ª 34.ª

e GM = y. Onde l'ordinata MG terminerà nella ascissa CG.

Di poi si è costruita la medesima equazione per mezzo della iperbola riferita ai diam.ⁱ in questa maniera. Coi semidiam.ⁱ CK = a, CQ = na è stata descritta l'iperbola KM, e colla QL condotta all'altro vertice L, e colla MN, che da ogni punto dovea condursi parallella a QL si determinarono CN = x, MP = y. Se dunque fosse MN = MP, potrebbe ciascuna esprimere la quantità y, il che perchè succeda, bisogna che il triang.º QCL sia isoscele. Per ottenere la qual cosa con qualunque raggio qc descrivasi un cerchio, a cui si adatti cl, che sia la metà di qc e si congiunga ql, sarà necessario, che il triang.º QCL sia simile a qcl. Dunque l'angolo QCP = qcp. Se pertanto coi semidiametri medesimi concorrenti in un angolo = qcp si descrive l'iperbola come sopra, sarà CN = x; NM = y siccome si cercava. Fig.ª 35

Scolio. Quantunque per la costruzione della equazione superiore sia sufficiente detrarre da y una quantità, che sia ad x in ragion data; pure se si metterà in pratica l'artificio di questa proposizione, se ne farà la costruzione nello stesso modo, e colla stessa eleganza.

Esempio 2.° Riducasi in memoria la costruzione della equazione $xy - \frac{ax^2}{b} - by + ax + a^2 - b^2 = 0$ la quale noi abbiamo esposto nella proposiz. sup.ª all'esempio 2.° Perchè DS possa essere $= x$ e far le veci della ascissa sarà di mestieri, che sia $= DP$, ovvero che $DF = DC$. Lo che osserverassi se col raggio $dc = DC$ si descriverà un cerchio, a cui si adatti $cf = CF$, e si faccia l'angolo DCF, ovvero l'angolo degli asintoti $LCB = dcf$. Imperocchè in tal maniera il triangolo DCF proverrà isoscele, e perciò $DS = DP$. Prese dunque DS come ascisse $= x$, le $MS = y$ a quelle insisteranno esattamente. Fig.ª 36.ª

Esempio 3.° Leggasi la costruzione della equazione $y^2 + xy \pm \frac{x^2}{4} - 2ay + 2bx - 2ba = 0$ la quale si contiene nell' esempio 3.° della proposizione antecedente. Affinchè l'ordinata SM immediatamente insista alle ascisse, bisogna che sia $DS = PD = x$, il che succederà qualunque volta $DF = DA$. Pertanto col raggio $da = DA$ descrivasi un cerchio in cui si adatti $af = AF$, nel nostro caso dovrà essere l'angolo $A = a$; dunque prodotta af, e condotta df, necessariamente l'angolo ECA sarà eguale all' angolo dfc. Laonde se descriverassi la Parabola, il cui diam.° CE Fig.ª 37.ª

faccia colla tangente CA un'angolo eguale a dfc, DS saranno $= x$ le ascisse della nostra equazione, $SM = y$ le ordinate.

Esempio 6.° Ritorna alla mente la costruzione della equazione $y^2 - xy + x^2 - ay + ax - a^2 = 0$, esposta nell'esempio 4.° della sezione antecedente. Se DA fosse eguale a DB, allora AS siccome eguale ad AP potrebbe considerarsi come ascissa. Nell'intervallo $db = DB$ si descriva un cerchio, a cui si applichi $ba = BA$. Se prendi l'angolo dei diam.ⁱ $QCK = dba$; allora $DB = DA$. Imperocchè l'angolo $QCK = DBA$: Dunque $DBA = dba$; Dunque il triang.° $DBA = dba$: mà $db = da$: Dunque $DB = DA$; e perciò $AS = AP = x$; e le coordinate della nostra equazione saranno AS, SM. Fig.ª 38

Esempio 5.° Nella sezione precedente all'esempio quinto abbiamo costruito l'equazione $y^2 + \frac{axy}{b} + \frac{2a^2x^2}{b^2} - ab = 0$. Per rimediare all'incommodo della costruzione è necessario, che sia $OA = AC$. Perlochè col centro in a, nell'intervallo $ac = AC$ descrivasi un cerchio, a cui si adatti $cq = CQ$, e Fig.ª

si congiunga aq. Perchè AQ sia eguale ad AC, fà di bisogno, che l'angolo QCA sia eguale al dato qca, ovvero che l'angolo QCK sia eguale al dato acp. Si costruisca dunque la curva coi diametri concorrenti in questo angolo, e a questo modo si averà $CS=x$, $SM=y$.

Esempio 6.° $y^2+3xy-x^2+ax-ay=0$ è l'equazione che abbiamo costruita all' esempio 6.° della proposizione antecedente. Fig.ª 40.ª

Quella dunque riletta si vada avanti così. Tante volte DS si potrà assumere come ascissa, quante volte BA sarà eguale a BD. Lo che si averà facilmente se col raggio $bd=BD$ descriverai un cerchio, a cui adatterai $da=DA$, e congiungerai ba. L'angolo ADB dovrà essere eguale all'angolo dato adb. Dunque l'angolo ADP, ovvero $QCK=adp$. Costrutta pertanto l'iperbola coi medesimi diametri che facciano il dato angolo adp, DS saranno le ascisse $=x$, SM le ordinate $=y$.

Scolio. Vista l'equazione, che si propone da costruire, facilmente si potrà determinare l'angolo, che farà il diam.°

colle sue ordinate. Imperocchè si prenda il coefficiente del piano xy, dividasi per metà; indi si assumino due linee b, a, che siano nella medesima ragione trà se, che hà la metà del coefficiente all'unità. Dipoi si formi un triangolo Isoscele, i cui due lati $= a$, la base $= b$. L'angolo del diam.° colle sue ordinate si deve fare eguale all'angolo interno alla base del triangolo descritto se al piano xy sia prefisso il segno $-$; eguale all'esterno, se abbia prefisso il segno $+$. La ragione di questa determinazione è chiara abbastanza dagli esempi addotti.

Scolio 2.° Abbenchè il metodo di questa proposizione sia molto più eccellente del metodo della precedente, pure egli hà questo incommodo di non poco rimarco, che le ordinate insistenti alle ascisse concorrono in un certo determinato angolo, nè quell'angolo si può determinare a piacere. A questo disordine devesi ancora applicare qualche rimedio, e si deve investigare il metodo, col quale possiamo ottenere, che le ordinate facciano colle ascisse quell'angolo, che più ne aggrada.

Prop. VI

Costruire le medesime equazioni in guisa, che le ordinate facciano qualunque angolo colle ascisse, alle quali insistono.

Confesso, che in nessuna maniera posso arrivare ad spiegare questo artificio molto sottile e ingegnoso senza alcun esempio proposto. Egli consiste in questo, che i parametri delle curve vengano determinati in maniera che come ascissa si possa prendere quella linea, nella quale terminano le ordinate. Negli esempi, che sono necessarissimi a render chiara la Teoria noi ricorreremo quelle equazioni medesime, che abbiamo proposte nei cap.^{i} ant.^{i} e per non ripetere le stesse cose noi supporremo le risoluzioni analitiche della prop.^{e} 4.^{a} le quali io esorto a ri leggere nuovamente.

Esempio 1.^{o} L'equazione $x^2+xy=a^2$ per mezzo della sostituzione $x+y=u$ fù cangiata nella seguente $xu=a^2$, che è all'Iperbola

Se in CG si prendano le ascisse x supponi in un angolo qualunque dato, Fig.^{a} 34.^{a} PM è $=y$, a cui devesi aggiugnere CP perchè s'abbia la assunta indeterminata ... Si ascinda perciò $CE=a$, e parallela

alle ordinate si conduca $EB = a$, e congiunta CB producasi MS in P: sarà $SP = CS$: Dunque $MP = y + x = u$. Se fosse perciò $CP = x$; si dovrebbe costruire l'Iperbola trà gli assintoti CZ, CB, in cui due delle coordinate sarebbero eguali ad a. Mà perchè CP non è $= x$, ma solamente è ad x in ragion, la cosa deve essere maneggiata così. Chiamisi $CB = e$, sarà $CE : CB :: CS : CP$ ovvero analiticamente $a : e :: x : \frac{ex}{a}$. Per lo che l'equazione trovata si moltiplichi per $\frac{e}{a}$, ed averàssi $\frac{ex}{a} \cdot u = ea$. Dunque le date coordinate colle quali s'hà da descrivere la curva, sono e, a. Si formi pertanto un triangolo Isoscele CEB, i di cui lati CE, $EB = a$, e l'angolo CEB sia il complemento a due retti dell'angolo dato CSM: indi si conduca CZ parallela a BE, e descrivasi trà gli assintoti CZ, CB l'iperbola, che passi per il punto E, e si conduca qualunque MSP, saranno $CS = x$, $MS = y$ della nostra equazione.

Sebbene per lo addietro io non abbia mai dimostrato sinteticamente la verità di quelle cose, che sono state dall'analisi dedotte

nè sono per farlo in avvenire, pure, perchè questo metodo sia meglio inteso hò stabilito di aggiugnere a questo primo esempio la dimostrazione sintetica.

Chiamisi adunque $CE=EB=a$, $CB=e$, $CS=x$, $SM=y$. E' chiaro essere $SP=CS=x$: Dunque $MP=x+y$. Mà è

$CE:CB::CS:CP$, ovvero

$a:e::x:\frac{ex}{a}=CP$; e il rettangolo $CP\cdot PM=CB\cdot BE$: Dunque $\frac{ex}{a}\cdot\overline{x+y}=ea$, ovvero moltiplicando per a, e divid.^{o} per e $x\cdot\overline{x+y}=x^2+xy=a^2$, che è l'equazione proposta; e perciò ci siamo serviti d'una costruzione legitima e genuina.

Corol.^{o} Se l'angolo CSM, e perciò l'angolo CEB fosse retto [giacchè spesso per commodo ci serviamo d'angoli retti], la retta $CB=e$ sarebbe $=a\sqrt{2}$.

La medesima equazione colla sostituzione $x+\frac{y}{2}=z$ è stata ridotta alla seguente $z^2-a^2=\frac{y^2}{4}$, la quale è all'iperbola, col primo semidiam.$=a$, e colle z aventi principio nel centro. Si prendano come ascisse $CN=x$, come ordinate $NM=y$, che facciano qualunque angolo dato. Ma perchè ad x devesi aggiungere $\frac{y}{2}$ per avere la z, si faccia $NP=\frac{MN}{2}$, e sarà Fig.^{a} 35.^{a}

$CP = x + \frac{y}{2} = z$. Si congiunga MP, e si avverta essere dato in specie il triangolo MNP: poichè è $MN : NP$ in ragion data, e le medesime comprendono un angolo dato. Laonde per aversi a questo un simile triangolo dato prendasi $CL = a$, e nell'angolo dato si conduca $LQ = 2a$, e si congiunga QC, che chiamisi $= e$: Dunque sarà $LQ : QC :: MN : MP$, ovvero analiticamente $2a : e :: y : \frac{ey}{2a}$:

In questo modo dispongasi l'equazione

$z^2 - a^2 = \frac{e^2 y^2}{4a^2} \cdot \frac{a^2}{e^2}$, ovvero

$z^2 - a^2 : \frac{e^2 y^2}{4a^2} :: a^2 : e^2$, la quale equazione è all'iperbola, il cui primo semid.° $= a$, il secondo $= e$, l'ordinatamente applicata al diam.° è MP, e le ascisse $CP = z$ cominciano nel centro. Dunque col primo diam.° $CK = a$, col secondo $CQ = e$ si descriva l'iperbola KM se da qualunque punto M si conduca MN parallela a LQ, averassi $CN = x$, $MN = y$ della data equazione.

Esempio 2.° 6.ª equazione.

$xy - \frac{ax^2}{b} - by + ax + a^2 - b^2 = 0$ introdotte due Fig.ª 30.ª

$y - \frac{ax}{b} = u$, $x - b = z$.
sostituzioni è stata ridotta alla seguente $zu = b^2 - a^2$. Suppongasi fatta ogni cosa, e siano $DS = x$, $SM = y$, e sia dato l'angolo MSD. Si ascinda da DS la retta $DF = b$, sarà $FS = z$. Dipoi parallella alle rette SM si conduca $CF = a$, e si congiunga DC, cui chiamo e, che si produca sarà $DF : DS :: CF : PS$

$$b : x :: a : \frac{ax}{b}$$

; PS dunque $= \frac{ax}{b}$, e quindi $MP = y - \frac{ax}{b} = u$. Parimente sarà $DF : DC :: FS : CP$

$$b : e :: z : \frac{ez}{b} = CP.$$

Laonde l'equazione ridotta così deve essere disposta $\frac{ezu}{b} = eb - \frac{ea^2}{b}$. Si tagli dunque $CB = DC = e$, $BE = b - \frac{a^2}{b}$, e trà gli asintoti CS, CB si descriva l'iperbola, che passi per il punto E. Essa sarà il luogo della nostra equazione, le cui ascisse $= x$ sono DS, le ordinate $= y$, sono SM.

Esempio 3.° Per ridurre l'equazione $y^2 + xy + \frac{x^2}{4} - 2ay + 2bx - 2ba = 0$ abbiamo Fig.ª 37.ª introdotte due sostituzioni $y + \frac{x}{2} - a = u$, $a - x = z$, ed abbiamo trovato l'equazione alla parabola $\overline{2b + a} \cdot z = u^2$. Orsù si supponga già fatto tutto, e siano $DS = x$, $SM = y$, le quali concorrano in qualunque dato

angolo DSM. Prendasi in DS prodotta DF $= a$, sarà FS $= a - x = z$: Dal punto F conducasi FA parallella a SM $= \frac{a}{2}$, e si congiunga DA prodotta MS in P. Per la similitudine de' trianli, siccome AF è la metà di DF, così PS è la metà di DS: Dunque PS $= \frac{x}{2}$, e PM $= y + \frac{x}{2}$. Producasi AF, fino che FC = AF, ed AC $= a$, e si conduca CQE parallella ad AD. Sarà QM $= y + \frac{x}{2} - a = u$; Per trovar poi CQ, ovvero AP, chiamisi AD $= e$, sarà DF : DA :: FS : AP, ovvero coll'analisi $a : e :: z : \frac{ez}{a}$: Dunque AP = CQ $= \frac{ez}{a}$: e perciò l'equazione ridotta si deve disporre in questa maniera $\frac{2b+a}{e} \cdot a \cdot \frac{ez}{a} = u^2$, e descritta la parabola CM col diam.° CE, colla tangente CA, e col lato retto $\frac{2b+a}{e} \cdot a$, questa sarà il luogo della data equazione, le cui ascisse $x =$ DS, le ordinate $y =$ SM.

Esempio 4.° L'equazione

$y^2 - xy + x^2 - ay + ax - a^2 = 0$ con due sostituzioni, cioè $y - \frac{a}{2} - \frac{x}{2} = u$, e $x + \frac{a}{3} = z$ è stata ridotta alla seguente $\frac{16a^2}{} - z^2 = \frac{4u^2}{}$, che indica l'equazione appartenere all'Elisse. Fig.^{a}

Supponi già fatto, e stabilisci $AS = x$, $SM = y$. Alle ascisse AS aggiungi la retta $AE = \frac{a}{3}$, e diverrà $ES = \frac{a}{3} + x = z$. Dal punto A parallela alle ordinate MS si conduca $AB = \frac{a}{2}$, e produci SA fino che $AD = a$, e congiungi DB, a cui sia parallela AP. Poichè BA è la metà di AD, PS sarà la metà di AS, dunque $PS = \frac{x}{2}$, ed $MP = y - \frac{x}{2}$, e $MR = y - \frac{x}{2} - \frac{a}{2} = u$, si chiami $DB = e$. Stà $DA : DB :: ES : CR$ ovvero coi simboli analitici $a : e :: z : \frac{ez}{a}$. Dunque perchè si abbia la equazione ~~si abbia~~ tra le coordinate CR, RM, a questo modo deve essere disposta l'equazione trovata $\frac{16e^2}{9} - \frac{e^2z^2}{a^2} : u^2 :: \frac{16e^2}{9} : \frac{4a^2}{3}$, la quale dà una costruzione sì fatta. Presi $CK = \frac{4e}{3}$, $CO = \frac{2a}{\sqrt{3}}$, con questi semidiam.ⁱ si descriva una Ellisse, questa sarà il luogo cercato della data equazione, e saranno $AS = x$, $SM = y$.

Esempio 5.° Adoperata una sola sostituzione $y + \frac{ax}{b} = u$, l'equazione $y^2 + \frac{axy}{b} + \frac{2a^2x^2}{b^2} - ab = 0$ è stata

mutata nella seguente $\frac{4b^2u^2}{7a^2} = \frac{4b^3}{7a} - x^2$.

Suppongasi fatto, e sia $CS = x$, $SM = y$, che concorrano in un dato angolo. Parallela a CS si conduca $QA = 2b$, e parallela a MS si faccia $QC = a$, e si congiunga AC, a cui tirisi parallela CK, e si produca MS in P, sarà $QA : QC :: SC : SP$, oppure Fig.ª 39.

$2b : a :: x : \frac{ax}{2b}$.

Dunque $MP = y + \frac{ax}{2b} = u$. Si chiami $AC = e$, sarà $QA : AC :: CS : CP$, ovvero

$2b : e :: x : \frac{ex}{2b}$.

Perlochè affinchè l'equazione sia instituita trà CP, PM, deve essere disposta così

$\frac{e^2u^2}{7a^2} = \frac{e^2b}{7a} - \frac{e^2x^2}{4b^2}$, oppure

$\frac{e^2b}{7a} - \frac{e^2x^2}{4b^2} : u^2 :: \frac{e^2b}{7a} : ab$: E perciò si ascinda $CK = \frac{e\sqrt{b}}{\sqrt{7a}}$, e $CO = \sqrt{ab}$, e con codesti semidiam.ⁱ si descriva una Ellisse, la quale sarà il luogo cercato

Esempio 6.º L'equazione

$y^2 + 3xy - x^2 + ax - ay = 0$. col mezzo di due sostituzioni $y + \frac{3x}{2} - \frac{a}{2} = u$, e $x - \frac{5a}{13} = z$ è stata ridotta alla seguente $\frac{4u^2}{13} = z^2 - \frac{12a^2}{169}$. Fig.ª 40

Si intenda fatto ciò che dee farsi, e supponiamo $DS = x$, $SM = y$, le quali linee concorrano in qualunque dato angolo. Da DS si ascinda $DE = \frac{5a}{13}$, ed avrassi $ES = x - \frac{5a}{13} = z$. Assumi parallela a SM la retta $AD = \frac{a}{2}$, e parallela a DS la retta $AB = \frac{a}{3}$, e congiungi BD, la quale denominerai $= e$, e quella produrrai, siccome ancora SM. Sarà $BA : AD :: DS : SP$, ovvero analiticamente $\frac{a}{3} : \frac{a}{2} :: x : \frac{3x}{2}$: Dunque $MP = y + \frac{3x}{2}$. Dal punto A parallela a BD si conduca AR, e sarà $RP = \frac{a}{2}$: Dunque $MR = y + \frac{3x}{2} - \frac{a}{2} = u$. Da E conducasi EC parallela a MR, sarà $BA : BD :: ES : CR$, ovvero $\frac{a}{3} : e :: z : \frac{3ez}{a} = CR$. Perchè dunque l'equazione versi tra le ordinate CR, RM, così deve essere disposta moltiplicando ciascun termine per $\frac{9e^2}{a^2}$

$$\frac{36e^2u^2}{13a^2} = \frac{9e^2z^2}{a^2} - \frac{108e^2}{169}$$

. Dunque si ha da assumere $CK = \frac{6e\sqrt{3}}{13}$, e $CQ = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$, e con questi semidiam.[i] in un dato

angolo concorrenti descriversi l'iperbola KM, perchè si ottenga il luogo della data equazione.

E con questi esempi io penso, che sia esposto con chiarezza questo ingegnosissimo metodo del chiarissimo Sig.r Giovanni di Wit, di cui io stesso sovente volte mi servo.

Metodo Terzo,

Che serve alla costruzione dei Luoghi Geometrici.

Vengo al metodo trovato dall'Ermanno, il quale non la cede a verun altro di eleganza, e di facilità. Comincierò secondo il mio solito dai luoghi del primo grado, dai quali passerò a quelli del secondo.

Prop. VII

Costruire le equazioni del primo grado.

Per servirsi del metodo dell'Ermanno bisogna dar questa forma all'equazione, il che è certo potersi sempre fare, $y = mx + n$ nella quale m, n esprimono le determinate coi suoi segni. Prendasi nella retta indefinita Fig. 1, 2

AP le ascisse x, positive verso P, negative verso D: le y positive si conducono all'insù e all'ingiù le negative, lo che faremo sempre. Si faccia $x=0$, e diverrà $y=n$. Perlochè dal punto A, dove hanno origine le ascisse si conduca $AF=n$, è necessario, che la linea retta, che deve essere il luogo della nostra equazione, passi per il punto F. Dipoi si faccia $y=0$, e sarà $x=-\frac{n}{m}$. Laonde dalla parte delle ascisse negative si tagli $AD=\frac{n}{m}$, ed averassi un'altro punto D, per cui deve passare il luogo: si congiunga dunque DF, questo sarà il luogo cercato, e saranno $AP=x$, $PM=y$.

Se ne desideri la dimostrazione sintetica della costruzione, eccola. Per la similitudine de' trianti

$DA : AF :: DP : PM$, ovvero

$\frac{n}{m} : n :: \frac{n}{m}+x : y$, ovvero

$1 : m :: \frac{n}{m}+x : y$, ovvero

$y = n+mx$, che era l'equazione proposta.

Se nella equazione $n=0$, allora fatto $y=0$, verrebbe $x=0$, il che indica passare il luogo per il punto A origine delle ascisse. Questo una volta posto non gioverebbe far di nuovo $x=0$; imperciocchè rosarebbe $y=0$ nè resterebbe determinato un Fig.^a 6.^a

nuovo punto del luogo: perlochè pongasi x eguale a una qualunque quantità data, per esempio s, e si farà $y = ms$: ascissa pertanto $AS = s$, ed in qualunque angolo applicata $SF = ms$, è necessario, che il luogo cercato tocchi il punto F: congiungasi dunque AFM, e si tirino MP parallele a FS, saranno $AP = x$, $PM = y$ della data equazione.

Se $m = 0$, è evidente, essere il luogo una retta parallella alla linea delle ascisse.

Dalla maniera di queste costruzioni si fà chiaro abbastanza, come si possa fare, che le ordinate formino qualunque angolo colla linea delle ascisse. Che se si vuole, che il luogo stesso faccia un dato angolo colle ordinate, si potrà ciò ottenere in questo modo senza difficoltà. Sopra la retta $AD = -\frac{n}{m}$ nella fig.ª 3.ª, o sopra $AS = s$ nella fig.ª 6.ª descrivasi un segmento di cerchio che comprenda l'angolo dato, in cui si adatti la corda $AF = n$ nella fig.ª 3.ª ovvero $SF = ms$ nella fig.ª 6.ª, Il luogo DFM, o AFM farà il dato angolo colle ordinate. Quest'angolo poi allora sarà retto, quando il segmento descritto sarà un semicircolo. Era necessario il premettere questa

riflessione perchè in appresso ci tornerà in uso.

Prop. VIII

L'equazione $y = mx + n \pm \sqrt{px^2 + qx + r}$ appartiene all'Elisse, se p è negativa, alla Parabola, se $p = 0$, alla Iperbola, se p è positiva

Trasferiti dall'una parte i termini rationali, si alzi l'equazione al quadrato, e sarà

$$y^2 - 2mxy + m^2x^2 - 2ny + 2mnx + n^2 = px^2 + qx + r.$$

e trasportati dall'una parte tutti i termini

$$y^2 - 2mxy + m^2x^2 - 2ny + 2mnx + n^2 = 0 :$$
$$\qquad\qquad - px^2 \qquad\qquad - qx - r$$

ma se p è negativa, il coefficiente del quadrato x^2 supera il quadrato della metà del coefficiente del piano, che è la proprietà dell'Elisse; se $p = 0$, il coefficiente del quadrato x^2 è eguale al quadrato della metà del coefficiente del piano, che è l'indizio della Parabola, se p è positiva il coefficiente del quadrato x^2 è minore del quadrati della metà del coefficiente del piano, che dinota l'Iperbola, come è chiaro dal Cap.° precedente; Dunque ecc.ª

Corol.° Ogni equazione indeterminata del secdo grado, che contenga il qua=

drato y^2 può ridursi a quella forma per mezzo della estrazione della radice, che hà l'equazione di questa proposizione.

Prop. IX

Costruire le equazioni, che spettano alla Parabola, in cui si trova il quadrato y^2.

Per la precedente tale è l'equazione alla Parabola $y = mx + n \pm \sqrt{qx+v}$. Questa si divida in due, e si ponga la parte irrazionale $mx+n = z$, e la parte irrazionale $\pm\sqrt{qx+v} = u$. La prima di queste si costruisca siccome si è insegnato nella prop. VII, cioè prese $AP = x$, sarà il luogo cercato DF secondo la determinazione già fatta. Questa linea DF determina la posizione del diam.° della sezione, che si deve descrivere. In essa dunque sarà posto il diam.° della parabola, di cui si dimanda la costruzione. Per determinare poi i suoi vertici, si faccia nella seconda equazione $u = o$, e proveniva $x = -\frac{v}{q}$: ascissa perciò $AS = \frac{v}{q}$ che si prende à sinistra per essere il valor negativo, e parallela ad AF condotta la SV, V sarà il vertice del diam.° Ma perchè resti determinato un'altro punto, per cui passi la parabola, si ponga $x = o$, e verrà

Fig.a 41.a

$u = \pm \sqrt{v}$. Perlochè si tagli $FQ = Fq = \sqrt{v}$, e col diam.° VF, colla tangente VS, col vertice V si descriva una parabola, che passi per il punto Q; questa sarà il luogo cercato, ed AP saranno $= x$, $PN = y$.

Dim.° Si chiami $DF = e$. Sarà $DA : DF :: SA : VF$, ovvero analiticamente $\frac{n}{m} : e :: \frac{v}{q} : VF = \frac{mev}{nq}$. Parimente $DA : DF :: AP : FM$, oppure $\frac{n}{m} : e :: x : FM = \frac{mex}{n}$: Ma per la natura della Parabola $VF : VM :: QF^2 : MN^2$, oppure $\frac{mev}{qn} : \frac{mev}{qn} + \frac{mex}{n} :: v : MN^2$, ovvero $\frac{v}{q} : \frac{v}{q} + x :: v : MN^2 = v + qx$: Dunque $MN = \sqrt{v+qx}$: ma $PM = mx + n$ per la prop. VII: Dunque $PN = y = mx + n + \sqrt{v+qx}$: Ciò che si è detto di MN, devesi dire di Mn negativa, onde troverassi $y = mx + n - \sqrt{v+qx}$. E' dunque stata costruita la data equazione.

Se $n = 0$, o $m = 0$, la prop.^{e} VII insegna come si determini il luogo della prima equazione assunta, e quindi la posizion del diametro.

Se tanto $n=0$, quanto $m=0$, allora la retta DFM caderebbe sopra la retta DAP: Perlochè la stessa linea delle ascisse sarebbe il diam.^o della sezione..

Se fosse $r=0$, e coincidessero i punti A, G, allora per determinare un qualche punto Π, per cui passi la Parabola, non gioverebbe niente il porre $x=0$, ma bisognerebbe fare la medesima x eguale a qualunque costante, come s, e diverrebbe $u = \pm \sqrt{qs}$. Ma devesi assumere la quantità s in maniera, che non sia immaginaria la quantità $\sqrt{qs}$: onde se q è positiva, è necessario che ancora essa sia affermativa, e così al contrario; anzi sarà forse opportuno porre $s=q$; Imperocchè allora $\pm \sqrt{qs} = \pm q$. Laonde tagliata AΠ $= s$, conducasi ΠS parallella alle ordinate, e d'ambe le parti del punto S si conduca $ST = St = \sqrt{qs}$, e per i punti T, t doverà passar la sezione.

Il medesimo artificio si doverà usare se r sarà negativa. Imperciocchè essendo $\sqrt{r}$ immaginaria, con quella non si potranno determinare i punti della curva. Per la qual cosa

si deve fare nella formola irrazionale $x = s$ affinche provenga $u = \pm\sqrt{qs - r}$. E la quantità s non si deve assumere solamente in guisa, che qs sia affermativa, ma eziandio si grande, che $qs > r$. Il resto, come sopra.

Se si cerca il parametro di quel diametro, a cui si riferisce la curva, dico quello essere $= \frac{ST^2}{VS}$

Hò aggiunto la dimostrazione sintetica, ed hò considerato tutto diligentemente, il che non farò in avvenire per essere il medesimo il metodo della dimostrazione, e le medesime le cose rimarcabili e degne di annotazione.

Prop. X

Costruire l'equazione $y = mx + n \pm \sqrt{-px^2 + qx + r}$, che appartiene all' Elisse.

Si faccia $mx + n = z$, di poi $u = \pm\sqrt{-px^2 + qx + r}$. La prima di queste si costruisca per mezzo della prop. VII, e si determini la posizione del diam.°, come nella precedente. Per determinare i vertici pongasi $u = 0$, e si troverà $x = \frac{q}{2p} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4p^2} + \frac{r}{p}}$ Fig.ª 42.ª

Questi due valori determinano i vertici. Imperocchè si faccia $Ah = \frac{q}{2p} + \sqrt{\frac{q^2}{4p^2} + \frac{r}{p}}$, ed $AH = \frac{q}{2p} - \sqrt{\frac{q^2}{4p^2} + \frac{r}{p}}$, e dai punti h, H si ordinino alli diam.° hu, HV, V, u saranno i vertici cercati, ed Vu il diam.° Se r sarà negativa, e maggiore di $\frac{q^2}{4p^2}$ ogni cosa diventa immaginaria, e si fà impossibile la costruzione. Ma se $r = -\frac{q^2}{4p^2}$, i punti H, h e quindi i punti V, u coincidono; perlochè l'Elisse si riduce a un punto, e tutti i valori y, ed u sono immaginarj eccettone uno solamente, che corrisponde all'ascissa $\frac{q}{2p}$

Mà quando la costruzione è possibile, per determinare un altro punto, per cui passi l'Elisse, si faccia $x=0$, e troverassi $u = \pm\sqrt{r}$. Si ascinda pertanto $FQ = Fq = \sqrt{r}$; indi si descriva l'Elisse che abbia il diam.° Vu, tocchi le rette VH, uh; e passi per il punto Q, questa sarà il luogo cercato

Se r osia $=0$, ovvero negativa è superfluo supporre $x=0$, poichè nel primo caso si farà $u=0$, nel secondo immaginaria. Per la qual cosa pongasi $x=s$, la qual quan=

tità si deve assumere in maniera, che sia media trà le due $AH = \frac{q}{2p} - \sqrt{\frac{q^2}{4p^2} + \frac{r}{p}}$, ed $Ah = \frac{q}{2p} + \sqrt{\frac{q^2}{4p^2} + \frac{r}{p}}$, affinchè il valore della quantità u non provenga immaginario. In questa supposizione troveremo $u = \pm\sqrt{-ps^2+qs+r}$. Onde presa $AS = s$ si conduca SF, in cui si ascinda $FQ' = Fq' = \sqrt{-ps^2+qs+r}$: i punti Q', q' appartengono all'Elisse che si deve descrivere.

Per trovare il valore del diam.° conjugato bisogna avvertire, essere $Hh = 2\sqrt{\frac{q^2}{4p^2} + \frac{r}{p}}$: Dunque divisa Hh bifària in K, sarà $HK = \sqrt{\frac{q^2}{4p^2} + \frac{r}{p}}$: Dunque troveràssi $AK = \frac{q}{2p}$; e perciò posta nell'equazione irrazionale $x = \frac{q}{2p}$ averemo il valore u, cioè CT semidiametro conjugato $= \sqrt{\frac{q^2}{4p} + r}$.

Spesso l'Elisse, che si costruisce può essere un circolo. Si deve dunque cercare in quali circostanze ciò avvenga: imperocchè conosciuto questo la costruzione riesce molto più semplice e spedita. Perchè la curva da descriversi sia un cerchio due condizioni si ricercano. La prima è,

che le ordinate concorrano col diam.^{o} Vu ad angoli retti, come è noto. Per avere questa condizione è necessario, che si costruisca il luogo DU della equazione razionale in guisa, che le ordinate HC^o facciano col medesimo un'angolo retto: in che modo poi ciò si faccia, noi l'abbiamo sopra insegnato. L'altra condizione richiede, che i due diametri conjugati siano eguali tra se. Mà giacchè è stato sopra trovato il diam.^{o} conjugato, ora si dee trovare il diam.^{o} lu perchè possano i due diametri farsi eguali. Perlochè chiamisi l'angolo, che fanno le ordinate colla linea delle ascisse, come $DHV = \varphi$ il suo seno si esprima per Seno φ, il seno totale per Seno t. E' manifesto essere il Seno t : Seno φ :: $Ah = 2\sqrt{\frac{g^2}{4p^2} + \frac{r}{p}}$: $lu =$

$$= \frac{2\ \text{Seno}\ \varphi}{\text{Seno}\ t} \cdot \sqrt{\frac{g^2}{4p^2} + \frac{r}{p}}$$

. Dunque la sua metà

$$l^oC = \sqrt{\frac{g^2}{4p^2} + \frac{r}{p}} \cdot \frac{\text{Seno}\ \varphi}{\text{Seno}\ t}$$

. Mà questa deve farsi eguale al semidiam.^{o} conjugato, onde nascerà l'equazione $\sqrt{\frac{g^2}{4p} + r} = \sqrt{\frac{g^2}{4p^2} + \frac{r}{p}} \cdot \frac{\text{Seno}\ \varphi}{\text{Seno}\ t}$ e fatta la divisione per $\sqrt{\frac{g^2}{4p^2} + \frac{r}{p}}$, verrà ad essere

$$\sqrt{p} = \frac{\text{Seno}\ \varphi}{\text{Seno}\ t}$$

. Dunque

$$p = \frac{\overline{\text{Seno}\ \varphi}^2}{\overline{\text{Seno}\ t}^2}.$$

Qualunque volta dunque questo sarà il valore

della quantità p, osservata la prima condizione l'Elisse sarà equilatera, ovvero un cerchio.

L'angolo φ, e il suo seno dipende dalle date quantità, che si contengono nella razionate equazione. E' noto, che se si faccia $AD = -\frac{n}{m}$, sarà $AF = n$, e $DF = \frac{n}{m}\sqrt{1-m^2}$. Perlochè posto il seno tutto $= -\frac{n}{m}$, sarà il seno $\varphi = \frac{n}{m}\sqrt{1-m^2}$. Dunque $p = 1-m^2$; e perciò se p sarà $= 1-m^2$, l'equazione si può costruire per mezzo d'un cerchio.

Sebbene fosse $n=0$, pure io proverei col medesimo raziocinio, provenire lo stesso valore della quantità p. Che se $m=0$, doverebbe essere $p=1$. Laonde in questa maniera si rende chiaro quando si possa coll'uso del circolo fare la costruzione.

Prop. XI

Costruire l'equazione all'Iperbola $y = mx+n \pm \sqrt{px^2+qx+r}$, quando $r < \frac{q^2}{4p}$, ed è p affermativa.

Dividasi secondo il solito l'equazione in due $mx+n=z$, ed $u = \pm\sqrt{px^2+qx+r}$. Fig.a 43.a La prima si costruisca, come sopra, e si

determini la posizione del diametro. Per determinar poi i suoi vertici pongasi $u = 0$, e si troverà $x = -\frac{q}{2p} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4p^2} - \frac{r}{p}}$, i quai due valori, siccome reali per essere $r < \frac{q^2}{4p^2}$ determinano i due vertici del diametro. Si ascinda dunque $Ag = -\frac{q}{2p} + \sqrt{\frac{q^2}{4p^2} - \frac{r}{p}}$, ed $AG = -\frac{q}{2p} - \sqrt{\frac{q^2}{4p^2} - \frac{r}{p}}$; che si prendono dalla parte sinistra perchè provengono negativi i valori, se le specie assunte sono positive; e dai punti G, g parallele ad AF si conducano GV, gu: V, u saranno i vertici della Iperbola. A determinare un'altro punto, per cui passi la curva si faciasi $x = s$ cioè a qualunque quantità costante, la quale però non deve essere media trà i valori AG, Ag, ma o maggiore, o minore d'ambidue, e si averà $u = \pm\sqrt{ps^2 + qs + r}$.
Si ascinda perciò $AS = s$, e $TS = tS = \sqrt{ps^2 + qs + r}$; e col primo diam.° Vu, colla tangente US si descriva un'Iperbola, che passi per il punto T, questa sarà il luogo cercato

Prop. XII

Costruire la medesima equazione, quando $r > \frac{q^2}{4p}$.

Tutti i casi precedenti sono stati trattati

dall'Ermanno nella citata dissertazione, nella quale pure sarebbero desiderabili molte osservazioni, che attesa la loro necessità, non sono state da noi ommesse; siccome chi leggerà l'Ermanno, potrà conoscere facilmente. Di quei casi però, che noi consideriamo nelle proposizioni seguenti, l'Ermanno non ne dice parola; e questo, che è il più difficile di tutti non si può in alcun modo risolvere colle cose finora spiegate. Imperciocchè se divisa come sopra l'equazione in due si farà $u=o$, diventerà immaginario il valore della ascissa x: il che non indica, essere impossibile la costruzione, ma più tosto doversi riferire l'equazione al secondo diametro della Iperbola. Il qual caso, perchè lo trattiamo secdo il metodo dell'Ermanno niente giudico essere più opportuno che determinare i vertici del primo diam.º conjugato di quello, a cui devesi riferire l'equazione. Per il qual fine osservando noi, che il primo diam.º è la minima delle applicate ordinatamente al secdo diam.º, potressimo questa col metodo dei massimi, e dei minimi determinare. Ma poichè questo metodo è ancora ignoto, si deve procedere per altra strada.

Si faccia dunque osservazione, che il primo diam.º nella Iperbola è egualmente

distante da linee eguali, le quali si applicano ordinatamente al suo diam.° conjugato, cioè che la parte del secondo diam.° intercetta frà le due ordinate eguali viene divisa bifaria dal primo diam.°, o dal centro: Laonde determinato questo punto facilissimamente determineremo la grandezza del primo diam.° Queste cose notate, che sono certissime,

Dividasi secondo il costume l'equazione in due, cioè $mx+n=z$, $u=\pm\sqrt{px^2+qx+r}$. Fig.ª

La prima si costruisca come sempre abbiamo fatto: coll'altra acciochè si trovino speditamente le due ordinate $=u$ eguali, facciasi $x=0$, e sarà $u=\pm\sqrt{r}$. Si ponga pertanto $FQ=Fq=\sqrt{r}$, e i punti Q, q saranno nella sezione. In vece di u si introduca $\sqrt{r}$ nella equazione, e sarà $r=px^2+qx+r$, ovvero $px^2+qx=0$; onde viene ad essere $x=0$, $x=-\frac{q}{p}$: Dunque qualunque dei due valori abbia la x, sarà sempre $u=\sqrt{r}$. Si prenda pertanto $AG=\frac{q}{p}$, che si divida per mezzo in E, si eciti EC, C sarà il centro della sezione. Poichè $AE=\frac{q}{2p}$, questo valore si introduca nella equazione in vece di x, e

sarà $u = \pm\sqrt{\frac{q^2}{4p^2} - \frac{q^2}{2p} + r} = \pm\sqrt{-\frac{q^2}{4p} + r}$, che è il valore del primo semidiam.º: Si ascinda $GV = Gu = \sqrt{-\frac{q^2}{4p} + r}$; e col primo diam.º Vu si descriva una Iperbola, che passi per il punto Q, ed averassi il luogo cercato.

In questa ipotesi non può essere $r=0$, perchè non sarebbe maggiore di $\frac{q^2}{4p}$. Che se poi pongasi $q=0$, e si faccia $x=0$ proviene $u=\pm\sqrt{r}$, il qual valore introdotto nella equazione sarà $r = px^2 + r$, ovvero $x^2=0$; il che indica che l'uno e l'altro valore della x devesi agguagliare $=0$. Dunque Qq sarà in questa ipotesi il pro diametro. Per trovare un'altro punto, per cui passi la curva facciasi $x=s$, e sarà $u = \pm\sqrt{ps^2+r}$: Si prenda $AE=s$, saranno $GV = Gu = \sqrt{ps^2+r}$; se dunque col primo diam.º Qq si descrive un'Iperbola, che passi per il punto V, si ottiene il luogo.

Scolio. Se nella detta equazione $r = \frac{q^2}{4p}$, che è come il confine trà i due casi ...tati; allora l'equazione si cambierà in ...sta $y = -mx + n + \overline{x + \frac{q}{2p}} \cdot \pm\sqrt{p}$, la quale ... appartenga alle 2.e linee rette, si può

però maneggiare col metodo delle ultime proposizioni: imperocchè in questo caso l'Iperbola si converte in due rette linee.

Ora non ci resta che di trattare intorno a quelle equazioni, che mancando il quadrato y^2 non si possono ridurre alla forma sudetta. In queste o v'è presente il piano xy, o nò. L'uno e l'altro genere sarà abbracciato dalle due proposizioni, che seguono.

Prop. XIII

Costruire quelle equazioni, in cui manca non meno il quadrato y^2, che il piano xy.

Cotali equazioni si possono sempre ridurre in questa forma $y = mx + n + px^2$. Fig.a 45.a
Questa equazione si deve dividere in due così $z = mx + n$, $u = px^2$. La prima si costruisca secondo il solito, nell'altra, che mostra abbastanza la Parabola, se si farà $u = 0$, troverassi $x = 0$. Laonde dal punto A principio delle ascisse si conduca la ordinata AV, che segnerà il punto V, in cui la parabola deve toccare la linea DV. Per determinare un'altro punto posto nella curva, pongasi $x = s$, e sarà $u = ps^2$. Prendasi dunque $AS = s$, indi condotta SF si assuma $FQ = ps^2$. Final-

mente per avere il luogo desiderato descrivasi la parabola, che tocchi DF in O, e passi per il punto Q.

Prop. Ultima.

Costruire quelle equazioni, che contengono il piano xy, ma non il quadrato y^2.

Le equazioni, di cui ora si dee trattare possono sempre ricevere questa forma $y = mx + n \pm \frac{p}{x+q}$. Secondo il consueto si formino due equazioni $z = mx + n$, $u = \frac{p}{x+q}$. Quest' ultima equazione manifesta chiaramente, doversi l'equazione riferire all' iperbola fra gli assintoti. Perlochè se si costruisca la prima equazione, come si è sempre fatto verrassi a determinare la posizione di un assintoto DM. Perchè poi resti determinato l'altro assintoto dalla seconda equazione si ponga $u = \frac{1}{0}$, e sarà $x = -q$. Si ascinda $AE = q$, e si conduca ECI che sarà l'altro assintoto, e C il centro della regione. Per determinare un punto, per cui passi la curva si faccia $x = s$ o qualunque quantità costante, e diverrà $u = \frac{p}{s+q}$ Fig.^a 46.^a

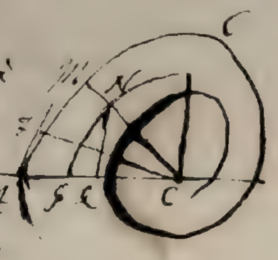
Si assuma $AR = s$, $ST = \frac{f}{s+q}$, e si descri=va trà gl' assintoti CM, EQ l'iperbola, che passi per il punto T, quella sarà il luogo cercato.

Se non è $q = 0$, sarà più commodo porre x, ovvero $s = 0$ per designare più facilmente il punto, per cui passi la curva.

Scolio. Non riuscirà forse discaro a veruno che io esponga brevemente tutto il fondamento, sù cui hà lavorato l'Ermanno questo elegante metodo. Divisa in due la data equazione, è chiaro essere $y = z + u$: z è l'ordinata che termina a una retta, come appare dalla costruzione: mà se si costruisse $u = \sqrt{px^2 + qx + r}$ in guisa che le x si prendessero nel diam.° della sezione, si troverebbe la u ordinata a quel diam.° Perlochè si dovrebbe congiungere l'una e l'altra ordinata della linea retta e della sezione, per ottenere la y: ma questo non farebbe al caso poichè le y non terminerebbero nelle ascisse. Devesi però riflettere, che se l'Elisse, o un' altra sezione si descrivesse sopra il diametro Sq che passi per il punto x, indi un'altra del medesimo genere sopra Uu, che passi per il punto T, il quale si determina, se si fac= Fig.^{a} 47.^{a}

cia $ST = RX$, nell'una e nell'altra equazione le ordinate ai diametri sarebbero eguali: Dunque se in vece della prima sezione gKS che è il luogo della equazione $u = \sqrt{px^2 + qx + r}$ si descriva la seconda sezione uTV, sarà parimente $y = PM + MN = PN$, la quale costruzione, poiché fa che le y terminino nelle x, ella è quella che si cerca e si ottiene il luogo della data equazione. Ed ecco condotto al termine e con molti metodi illustrato il trattato dei luoghi Geometrici del secondo grado.

La spirale iperbolica denotata dalla figura AMCC ha questa proprietà che presa dal centro C la CS eguale all'unità, e con essa descritto un circolo K, ed espressi gli archi SN determinati dall'asse AC noto, e dai raggi spirali CM, y per la specie t, e la CA per a; e la CF nota tangente dell'angolo FAC per θ, vaglia l'equazione



$$y = \frac{\theta a}{t+\theta}$$, e siccome posto $t = -\theta$,

y diventa infinita, il che indica l'allontanamento all'infinito della curva dal raggio spirale y nella limitata distanza θa, così il vero asintoto della curva non sarà il raggio spirale che si parte dal centro, ma bensì una linea ad esso parallela nella distanza $CK = \theta a$.

Una celebre proprietà della spirale iperbolica si è quella del tagliar sempre archi eguali dagli infiniti circoli concentrici al centro medesimo della curva, onde riluce maggiormente la natura e forma di questa curva, e più agevolmente si fa idea delle infinite rivoluzioni, che fa la curva attorno al centro prima di giugnervi, di quello che ne indichi l'altra sua celebre proprietà della sottotangente costante.

La equazione $2x = M^n + N^n$, quando M moltiplicato in N sia eguale all'unità si cangia sempre in quest'altra $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{M^n}{N^n}$

Se è dato il seno, e il cosseno di due angoli il seno dell'angolo, che è la differenza di questi sarà la differenza dei prodotti del seno dell'angolo maggiore nel cosseno del minore, e del seno del minore nel cosseno del maggiore. Sia per esempio il seno del maggiore angolo S, e il suo cosseno C, ma il seno dell'angolo minore s, e il cosseno c, il seno della differenza angolare sarà $Sc - sC$, supposto il raggio eguale all'unità. Il seno poi della somma dei due angoli dati $= Sc + sC$ diviso per il raggio, e il suo cosseno $= Ss - Cc$ se si cerca la somma, e $Ss + Cc$ per differenza.

Nell'equazione $a^{m-1}(-y^{m-2}) = by^m$ e simili bisogna avvertire che non si può in alcuna maniera dividere l'omogeneo di comparazione by^m per $-y^{m-2}$ onde ne risulti $a^{m-1} = -by^2$. e questo per non sapersi se la potestà $m-2$ faccia restare il segno meno, oppure lo cangi in $+$; onde volendosi in quel caso dividere sarà più spediente alzare il coefficiente a^{m-1} alla potestà di $m-2$, affinchè $a^{m-1}(-y^{m-2})$ diventando $a(-a^{m-2}y^{m-2})$ si possa dividere y^m per y^{m-2} senza incorrere in isbagli. L'equazione dunque in tal caso si cangierà in quest'altra $a(-a^{m-2}) = by^2$.

Nel mezzo uniforme resistente in ragion duplicata delle celerità, perchè il corpo attratto da una qualunque potenza ~~descriva~~ a un punto fisso descriva la medesima curva che descriverebbe nel vacuo attratto a un punto fisso da un'altra potenza, bisogna che la potenza nel pieno stia alla potenza nel vacuo come la gravità terrestre supposta = 1 al numero, il cui logaritmo è lo spazio curvilineo percorso dal mobile nel mezzo resistente, il quale spazio sia diviso per l'esponente della medesima resistenza, ovvero bisogna che la potenza nel vacuo posta decresca nel pieno in ragione del numero, che ha per logaritmo lo spazio percorso dal mobile diviso per l'esponente della resistenza.

X Se sono date le tangenti di due archi circolari, la tangente della somma dei due archi sarà la somma della tangente dell'arco maggiore aggiunta al prodotto della tangente del minore nel quadrato della secante dell'arco maggiore, il quale prodotto è diviso per il rettangolo del raggio nella secante dell'arco minore. Così se per esempio la tangente dell'arco maggiore sia T, quella del minore t, sarà la tangente della somma degli archi $= T + \frac{t(1+TT)}{\sqrt{1+tt}}$ posto il raggio eguale all'unità.

X È falsissimo, perchè la tangente della somma dei due archi è eguale al quadrato del raggio moltiplicato nella somma delle tangenti date, e il tutto diviso per la differenza del quadrato del raggio, e del rettangolo delle tangenti date

Sia u funzione di x, e di y variabili di dimensione m, e pongasi $du = Rdx + Sdy$; R, e S sono funzioni di x e di y, sarà generalmente $Rx + Sy = mu$, onde se u sarà funzione di x e di y di dimensione zero, $Rx + Sy$ sarà eguale a zero, ed avrassi $S = -\frac{Rx}{y}$.

Se si darà la serie degli integrali $\int \frac{dx}{\sqrt{bx-xx}}$; $\int \frac{xdx}{\sqrt{bx-xx}}$; $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{bx-xx}}$; $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{bx-xx}}$ etc. talmente presi che fatto $x=0$, svaniscano, dopo l'integrazione se si porrà $x = b$, e la ragione della periferia al diametro $\pi : 1$, sarà il termine integrale corrispondente a ciascun termine della serie data corrisponder da questa altra serie π, $\frac{1\cdot\pi b}{2}$, $\frac{1\cdot3\cdot\pi b^2}{2\cdot4}$, $\frac{1\cdot3\cdot5\cdot b^3}{2\cdot4\cdot6}$ &c. in cui π corrisponde al primo integrale $\int\frac{dx}{\sqrt{bx-xx}}$, $\frac{1\cdot\pi b}{2}$ al secondo integrale $\int\frac{xdx}{\sqrt{bx-xx}}$, e così degli altri.

[Margin: ... metodo ... che ... in cui ... di nessuna dimensione, vale ... generalmente se ... $nx = $ ... [illegible]]

Ogni serie, che continuata in infinito ha somma finita, ancorchè oltre l'infinito si continui la serie più del doppio lunga, non riceverà alcuno aumento, ma ciò che col pensiero aggiugnesi dopo l'infinito, realmente sarà quantità piccola infinitamente, e perciò trascurabile. Mentre se ciò non fosse, la somma della serie sebbene in infinito continuata non sarebbe determinata, e perciò non finita. Onde ne segue, che se ciò che nasce dalla continuazione oltre il termine infinitesimo sia di finita grandezza, la somma della serie necessariamente deve essere infinita. Da questo principio potremo giudicare, se la somma

di qualunque serie proposta sarà infinita o finita. Sia per esempio la serie armonica $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{a+b}$, $\frac{c}{a+2b}$ ecc. all'infinito continuata, e il termine infinitesimo $\frac{c}{a+\overline{i-1}\cdot b}$ dinotante i un numero infinito, che sia l'indice di questo termine. Ora la serie più in là si produca dal termine $\frac{c}{a+ib}$ fino al termine $\frac{c}{a+\overline{ni-1}\cdot b}$, il cui esponente sia ni. Dunque il numero di questi termini insieme aggiunti è $\overline{n-1}\times i$, e la somma di tutti i termini minore di $\frac{\overline{n-1}\times ic}{a+ib}$, ma maggiore di $\frac{\overline{n-1}\times ic}{a+\overline{ni-1}\cdot b}$. Ma perchè i è infinitamente grande svanirà l'a nell'uno e nell'altro denominatore. Dunque la somma sarà maggiore di $\frac{\overline{n-1}\times c}{nb}$, ma minore di $\frac{\overline{n-1}\times c}{b}$; onde si vede, essere questa somma finita, e in conseguenza la somma della serie $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{a+b}$ ecc. all'infinito continuata, infinitamente grande.

Se si avrà questa espressione, che include sommatoria di sommatoria $\int x^k dx \cdot \overline{\int x^m dx}$, ella sarà eguale a quest'altra espressione, in cui non si includono, che sommatorie semplici, cioè eguale $= \frac{x^{k+1} \int x^m dx - \int x^{m+k+1} dx}{k+1}$.

Abbiasi la sommatoria di due sommatorie $\int x^r dx \overline{\int x^k dx \overline{\int x^m dx}}$. La sommatoria delle due $\int x^k dx \cdot \overline{\int x^m dx}$ hassi colla precedente espressione, in cui non v'ha che una sommatoria per

ciascun termine, onde moltiplicato ciascun termine per $\int x^r dx$ si avrà l'espressione delle tre sommatorie data per più termini di due sole Sommatorie, le quali trattate colla regola consueta ridurranno la Sommatoria di tre sommatorie a più termini, che includono una sola sommatoria e l'espressione sarà

$$\frac{x^{r+k+n}\int x^m dx - \int x^{m+r+k+n} dx}{\overline{r+k+n}\times\overline{k+1}} - \frac{x^{r+1}\int x^{m+k+1} dx +}{\overline{r+1}\times}$$

$$\frac{+\int x^{m+k+r+n} dx}{\times\,\overline{k+1}} \text{, ovvero}$$

$$\frac{x^{r+k+n}\int x^m dx}{\overline{r+k+n}\times\overline{k+1}} - \frac{x^{r+1}\int x^{m+k+1} dx}{\overline{r+1}\times\overline{k+1}} + \frac{\overline{k+1}\times\int x^{m+k+r+n} dx}{\overline{r+1}\times\overline{k+1}\times\overline{r+k+n}}.$$

Dal quale andamento si caverà la regola per la Sommatoria di ~~quattro~~ tre sommatorie, o di più ancora composta.

Sia il termine generale di una serie $\dfrac{x^n}{an+b}$ sarà la somma della progressione fino all'indice $n = \dfrac{x^{-\frac{b}{a}}\int x^{\frac{b}{a}} dx \times \frac{\overline{1-x^n}}{1-x}}{a}$; se poi sarà il termine generale $\dfrac{x^n}{\overline{an+b}\times\overline{cn+e}}$, sarà la somma della progressione

$$\frac{x^{-\frac{e}{c}}\int x^{\frac{e}{c}} dx \times \frac{\overline{1-x^n}}{1-x} - x^{-\frac{b}{a}}\int x^{\frac{b}{a}} dx \times \frac{\overline{1-x^n}}{1-x}}{bc-ae}$$

Che se il divisore sarà composto di trè fattori onde sia il termine generale $\dfrac{x^n}{\overline{an+b}\times\overline{cn+e}\times\overline{fn+g}}$

allora sarà la somma della serie fino all'indice $n = \frac{ax^{-\frac{b}{a}}\int x^{\frac{b}{a}}dx \times \frac{1-x^n}{1-x}}{\overline{ae-bc} \times \overline{ag-bf}} + \frac{cx^{-\frac{e}{c}}\int x^{\frac{e}{c}}dx \times \frac{1-x^n}{1-x}}{\overline{bc-ae} \times \overline{cg-ef}}$

$+ \frac{fx^{-\frac{g}{f}}\int x^{\frac{g}{f}}dx \times \frac{1-x^n}{1-x}}{\overline{bf-ga} \times \overline{ef-cg}}$. Da questa

ultima somma cavasi la regola generale per qualunque numero dei fattori nel divisore, onde per esempio essendo il termine generale $\frac{x^n}{\overline{an+b} \times \overline{cn+e} \times \overline{fn+g} \times \overline{hn+k}}$

sarà il valore di tutta la serie questo

$$\frac{ax^{-\frac{b}{a}}\int x^{\frac{b}{a}}dx \times \frac{1-x^n}{1-x}}{\overline{ae-bc} \times \overline{ag-bf} \times \overline{ak-bh}} + \frac{cx^{-\frac{e}{c}}\int x^{\frac{e}{c}}dx \times \frac{1-x^n}{1-x}}{\overline{bc-ae} \times \overline{cg-ef} \times \overline{ck-eh}} +$$

$$+ \frac{fx^{-\frac{g}{f}}\int x^{\frac{g}{f}}dx \times \frac{1-x^n}{1-x}}{\overline{bf-ga} \times \overline{ef-cg} \times \overline{fk-gh}} + \frac{hx^{-\frac{k}{h}}\int x^{\frac{k}{h}}dx \times \frac{1-x^n}{1-x}}{\overline{bh-ak} \times \overline{eh-ck} \times \overline{gh-fk}},$$

e così dicasi degli altri.

Se i fattori, che formano il divisore del termine generale sono eguali, le suddette formule non sono atte a dare il valore della serie. Si ha però il valore della serie per mezzo dei logaritmi. Sia per esempio il termine generale della serie $\frac{x^n}{\overline{an+b}^2}$, sarà la somma della progressione $=$

$$= \frac{lx \int x^{\frac{b}{a}}dx \times \frac{1-x^n}{1-x} - \int x^{\frac{b}{a}}dx \times \frac{1-x^n}{1-x}\, lx}{l \cdot a^2 x^{\frac{b}{a}}}.$$

Sia il termine generale $\frac{x^n}{\overline{an+b}^3}$ sarà la somma della serie

$$= \frac{\overline{lx}^2 \int x^{\frac{b}{a}}dx \times \frac{\overline{1-x}^n}{1-x} - 2lx\int x^{\frac{b}{a}}dx \times \frac{\overline{1-x}^n}{1-x}\, lx + \int x^{\frac{b}{a}}dx \times \frac{\overline{1-x}^n}{1-x}\, \overline{lx}^2}{1 \cdot 2 \cdot a^3 x^{\frac{b}{a}}}$$

Generalmente sia il termine generale $\frac{x^n}{\overline{an+b}^m}$

sarà la somma

$$= \frac{\overline{lx}^{m-1}\int x^{\frac{b}{a}}dx \times \frac{\overline{1-x}^n}{1-x} - \frac{m-1}{1}\cdot \overline{lx}^{m-2}\int x^{\frac{b}{a}}dx\, lx \times \frac{\overline{1-x}^n}{1-x} + \frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\,\overline{lx}^{m-3}\int x^{\frac{b}{a}}dx\,\overline{lx}^2 \times \frac{\overline{1-x}^n}{1-x} - \text{ec.}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \overline{m-1}\; a^m x^{\frac{b}{a}}}$$

Leonardo Eulero Geometra massimo nel Tomo VI degli Atti dell' Academia di Pietroburgo per trovare la somma di alcune Serie Geometriche o Algebraiche, purchè sia dato Algebraicamente il termine generale della medesima serie, suppone sapersi dal Lettore la verità di questa equazione $t = \frac{dS}{1 \cdot dn} - \frac{ddS}{1 \cdot 2 \cdot dn^2} + \frac{d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dn^3} - \frac{d^4S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dn^4}$ ec. in infinito, in cui t esprime il termine generale della Serie, che consta di una qualche funzione di n, che esprime il numero dei termini, e S dinota la somma della medesima Serie. Ma perchè non è sì facile ed ovvia la verità di questa equazione perciò s'ingegnerà con qualche opportuno metodo dimostrarla. Stabiliscasi dunque in primo luogo, come principio sicuro, e fa-

almeno dimostrabile questa proposizione.
Se il termine generale della serie è una
qualche funzione di n, il termine antecedente
sarà la medesima funzione di n-1; onde
si deduce che la somma di tutta la serie,
escluso il termine generale sarà eguale
alla medesima somma di tutta la serie,
compreso anche il termine generale, purchè
si sostituisca in vece di n l'esponente
n-1. Questo posto chiamisi la somma
della serie, escluso il termine generale,
s. Sarà dunque la somma di tutta la serie
meno la somma della serie escluso il termine
generale eguale al medesimo termine
generale. Dunque $S-s=t$. Egli è
chiaro, che si può porre la somma della
serie eguale a una qualche serie infinita
di termini in cui l'n continuamente cresca
di una dimensione, purchè ciascun termine
ne sia affetto dalle sue costanti, che sono
poi da determinarsi. Sia pertanto
$S=A+Bn+Cn^2+Dn^3 \ldots$. Dunque
per le cose sudette

$$\begin{aligned} s = A &+ Bn + Cn^2 + Dn^3 \ldots \\ &- B - 2Cn - 3Dn^2 \ldots \\ &\quad + C + 3Dn \ldots \\ &\qquad - D \ldots \\ &\qquad \text{et cetera} \end{aligned}$$

e quindi questa da quella sottratta
darà il termine generale. Dunque

$$\begin{aligned} S-s=t= B &+ 2Cn + 3Dn^2 \ldots \\ &- C - 3Dn \ldots \\ &\quad + D \ldots \end{aligned}$$

Si differenzj la prima equazione $S=A+Bn \ldots$

e avrassi $\frac{\partial S}{\partial n} = B + 2Cn + 3Dn^2$ ec.

Si torni a differenziare, e sarà posto ∂n costante $\frac{\partial\partial S}{1.2.\partial n^2} = C + 3Dn$ ec. Si differenzi di nuovo, e si avrà $\frac{\partial^3 S}{1.2.3.\partial n^3} = D$ ec. all'infinito.

Dunque sostituendo nell'equazione $t = B + 2Cn + 3Dn^2$ ec.
$\quad - C - 3Dn$ ec.
$\quad\quad + D$ ec.
i valori trovati colla differenziazione, avremo questa equazione

$$t = \frac{\partial S}{1.\partial n} - \frac{\partial\partial S}{1.2.\partial n^2} + \frac{\partial^3 S}{1.2.3.\partial n^3} \text{ ec.}$$

che è la medesima con quella che ha trovata l'Eulero. Per mezzo di questa equazione data la somma della serie si trova il termine generale. Imperciocchè si differenzj la somma fino che si arriva a un differenziale che sia eguale a zero, posto sempre ∂n costante, indi si sostituiscano i valori finiti nella equazione, e avrassi il termine generale. Ma dato il termine generale non si può avere la somma della serie senza la trasmutazione dell'equazione sudetta $t = \frac{\partial S}{\partial n} - \frac{\partial^2 S}{1.2.\partial n^2}$ ec. Pongasi dunque

$$S = \int t\partial n + At + \frac{B\partial t}{\partial n} + \frac{C\partial\partial t}{\partial n^2} + \frac{D\partial^3 t}{\partial n^3} \text{ ec.}$$

Le costanti A, B, C ec. si determineranno

nel progresso del Calcolo. Si differenzj l'equazione, e si divida per ∂n e avrassi $\frac{\partial S}{\partial n} = t + \frac{A\partial t}{\partial n} + \frac{B\partial^2 t}{\partial n^2}$ ...

Si torni a differenziare, e si divida per $2\partial n$, e sarà il risultato

$$\frac{\partial\partial S}{2\partial n^2} = \frac{\partial t}{2\partial n} + \frac{A\partial^2 t}{2\partial n^2} + \frac{B\partial^3 t}{2\partial n^3} \cdots$$

Si seguiti a differenziare fino all'infinito dividendo sempre le quantità ulteriormente differenziate per i divisori costanti, che corrispondono al grado differenziale della quantità S nella equazione $t = \frac{\partial S}{\partial n} - \frac{\partial\partial S}{2\partial n^2}$ ...

Indi sostituiscasi per ciascun termine della serie $\frac{\partial S}{\partial n} - \frac{\partial\partial S}{2\partial n^2}$ ... i suoi rispettivi valori dati per t, e ne risulterà l'equazione

$$t = t + \frac{A\partial t}{\partial n} + \frac{B\partial\partial t}{\partial n^2} + \frac{C\partial^3 t}{\partial n^3} \cdots$$
$$- \frac{\partial t}{2\partial n} - \frac{A\partial^2 t}{2\partial n^2} - \frac{B\partial^3 t}{2\partial n^3} \cdots$$
$$+ \frac{\partial^2 t}{1.2.3.\partial n^2} + \frac{A\partial^3 t}{1.2.3.\partial n^3} \cdots$$
$$- \frac{\partial^3 t}{1.2.3.4.\partial n^3} \cdots$$

Appare dalla forma della equazione, dover svanire tutti i termini nell'omogeneo di comparazione fuori che il primo t, onde avrassi la determinazione delle nostre costanti: e perciò sarà $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{A}{2} - \frac{1}{1.2.3}$, $C = \frac{B}{2} - \frac{A}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4}$, onde appare chiaramente

to dei coefficienti numerici, i cui valori sostituiti nella equazione $S=\int t\,dn + At + B\frac{dt}{dn}$ ... daranno $S=\int t\,dn + \frac{t}{2} + \frac{dt}{12\,dn} - \frac{d^3t}{720\,dn^3} + \frac{d^5t}{30240\,dn^5}$ ...

in cui è da notare, che si annullano i termini, in cui è pari il numero del grado della differenziazione. Quindi dato il termine generale, hassi la somma, purchè nel denominatore del termine generale non siavi l'indice n, mentre in tal caso la differenziazione va all'infinito, e nissun termine differenziale si adeguaglia a zero. Notisi, che integrando $\int t\,dn$ deve aggiungersi tale costante, che fatto $n = \ldots$, sia $S=0$.

Spesse volte succede, che alcune equazioni differenziali contengono in se stesse delle equazioni integrali, che non si possono cavare per integrazioni. Come per esempio questa equazione differenziale,

$$\frac{(k^2+1)\,dx - k^2\,d\omega}{(k^2+1)\,x - k^2\omega} = \frac{d\omega}{\omega}$$

integrata dà $x=\omega$ ...

Trattanto però egli è chiaro racchiudersi nella equazione differenziale questa integrale $k^2\omega=(k^2+1)x$ avvenchè non apparisca per mezzo della integrazione. Infatti sostituendo nella equazione differenziale il valore di ω trovato per quest'ultima integrale tanto il numeratore quanto il denominatore diventa zero, onde è evidente, che per l'identità dei termini della equazione differenziale vale l'equazione integrale $k^2\omega = (k^2+1)\,x$.

Quindi generalmente si inferisca, che l'equazione differenziale $\frac{d\theta}{T} = Vdu$, in cui T è tale funzione di θ, che svanisca posto $\theta = 0$, e V qualunque funzione di u, egualmente comprende l'integrale $\theta = 0$, e l'integrale $\int \frac{d\theta}{T} = \int Vdu$, che si cava dall'integrazione. Perlopiù il caso di $\theta = 0$ si può trascurare, se θ è quantità semplice, non però così se è composta. A volte però non apparisce subito questa condizione nell'equazione differenziale, e in tal caso una opportuna sostituzione la scopre. Sia per esempio l'equazione $ds = \frac{-dx}{\sqrt{a-x^2+aX}}$. X è funzione di x che svanisce posto $x=a$. In questo caso il denominatore non diventa zero fatto $x=0$; onde all'equazione così conformata non si può applicare la nostra regola. Perchè però ella sia applicabile facciasi $a-x=\theta$, e $-dx=d\theta$ onde sostituendo avrassi $ds = \frac{d\theta}{T}$, in cui T è una tale funzione di θ, che svanisce posto $\theta = 0$, poichè abbiamo supposto, che X svanisca posto $x=a$, cioè $\theta = 0$. Dunque varrà l'integrazione $\theta = 0$, cioè $x=a$. Più universalmente però in questa equazione $Vdu = \frac{d\theta}{T}$, se T non isvanisce posto $\theta = 0$, comprenderassi l'equazione $T=0$, onde sa:

rà t eguale a una costante quantità, e sarà $\partial t = 0$; che se τ è un composto di più fattori in ciascuno de' quali entri il t, egli è certo, che potendosi ciascuno eguagliare a zero, si avranno tante soluzioni quante saranno i fattori; come nella formola $\frac{\partial t}{t\sqrt{1-tt}}$ in cui $\tau = t\sqrt{1-tt}$ hannosi due casi che servono, il primo $1-tt$ = cioè $t=1$; il secondo $t=0$.

La equazione $x = \frac{1}{2}\int \frac{1+\sqrt{1-e^{-\frac{z}{k}}}}{1-\sqrt{1-e^{-\frac{z}{k}}}}$, e tutte quelle, che alla stessa forma si riducono, equivalgono a quest'altra $x = \int e^{\frac{z}{2k}} + \sqrt{e^{\frac{z}{k}}-1}$; dalche si deduce da questo, che $\frac{1}{\sqrt{e}-\sqrt{e-1}} = \sqrt{e}+\sqrt{e-1}$, come è evidente.

Sia la equazione $\int\frac{s-z}{f} = \frac{z}{z-s}$; Cerchisi cosa nasca quando s è eguale a zero, e così quando z è eguale a zero. Pongasi $s-z=q$; dunque sostituendo $\int\frac{q}{f} = \frac{s-q}{-q} = \frac{q-s}{q}$. In ipotesi di $z=0$ diventa $q=s$, dunque $\int\frac{s}{f} = \frac{0}{s}$; dunque $s\int\frac{s}{f}=0$, ove notisi che l's ha due valori; il primo quando $s=f$, poiché allora svanisce la quantità $s\int\frac{s}{f}$; il secondo quando $s=0$; mentre in quel caso $s\int\frac{s}{f}$ diventa $0\int\frac{0}{f}$, cioè $\int\frac{0^0}{f^0}$; ma $0^0=1$, e $f^0=1$, dunque $\int\frac{0^0}{f^0}=\int\frac{1}{1}=0$. Dunque in caso di $s=0$, z è eguale a zero. Quindi, poiché nella supposizione, che discenda un corpo per un'arco di cicloide nel mezzo resistente uniforme in ragione delle semplici velocità, e sollecitato dalla potenza uniforme, in caso che l'esponente della resistenza sia eguale a un quarto del dia-

metro del circolo genitore diviso per la potenza uniforme, arrivasi all'equazione $\int \frac{s-4\sqrt{ku}}{\sigma} = \frac{4\sqrt{ku}}{4\sqrt{ku}-s}$, in cui s esprime gli archi della cicloide che cominciano dal punto infimo, f l'arco dato, a capo del quale si comincia il moto, u l'altezza dovuta alla velocità in ciascun punto dell'arco, e k l'esponente della resistenza; perciò deducesi che la velocità sarà zero al principio del moto e svanirà ancora nel punto infimo della cicloide onde non darassi alcuna ascesa dall'altra parte, ma il corpo giu[n]to [illegible] l'arco f avrà perduto tutto il suo moto.

L'uso delle serie nelle integrazioni delle equazioni è sempre stato il metodo supplettorio al difetto del calcolo, sicchè qualunque volta le equazioni non ammettono integrazione per mezzo della quadratura del circolo e dell'iperbola, è sempre bene ricorrere alle serie per indi dedurne qualche opportuna riflessione sulla natura dell'equazione medesima. Nè importa, che l'equazione sia differenziale di secondo o d'inferior grado, perciò il metodo delle serie si può estendere egualmente a queste tali equazioni. Sia per esempio l'equazione $addz = zsds^2$, in cui ds è assunto costante; cioè $z = \frac{a\,ddz}{sds^2}$. Fassiasi una equazione

si faccia $z = f + As + Bs^2 + Cs^3 + Ds^4 + Es^5 + Fs^6 + \ldots$

e differenziando avremo $dz = Ads + 2Bsds + 3Cs^2ds + \ldots$

e nuovamente differenziando avremo $ddz =$

$2Bds^2 + 2\cdot3\,Csds^2 + 3\cdot4\,Ds^2ds^2 + 4\cdot5\,Es^3ds^2 + 5.6\,Fs^4ds^2 + \ldots$

onde $\frac{addz}{sds^2} = \frac{2aB}{s} + 2\cdot3\,aC + 3\cdot4\,aDs + 4\cdot5\,aEs^2 + \ldots$,

mà $\frac{addz}{sds^2} = z = f + As + Bs^2 + Cs^3 + Ds^4 + Es^5 + \ldots$

come abbiamo posto; dunque la serie

$f + As + Bs^2 + Cs^3 + \ldots = \frac{2aB}{s} + 2\cdot3\cdot aC + 3\cdot4\,aDs + 4\cdot5\,aEs^2 + \ldots$

e moltiplicando per s, e trasportando tutti i termini da una parte avremo $0 =$

$$\begin{aligned} 2aB + 2\cdot3\,aCs &+ 3\cdot4\,aDs^2 + 4\cdot5\,aEs^3 + 5\cdot6\,aFs^4 + \ldots \\ - fs &- As^2 - Bs^3 - Cs^4 - \ldots \end{aligned}$$

la determinazione delle arbitrarie costanti si avrà eguagliando ciascun termine della serie a zero; dunque $B = 0$, $C = \frac{f}{2\cdot3\,a}$;

$D = \frac{A}{3\cdot4\,a}$; $E = 0$; $F = \frac{f}{2\cdot3\cdot5\cdot6\,a^2}$ $\ldots$; i

quali valori sostituiti nella equazione assunta si avrà $z = f + As + \frac{fs^3}{2\cdot3a} + \frac{As^4}{3\cdot4\,a} + \frac{fs^6}{2\cdot3\cdot5\cdot6\,a^2} +$

$+ \frac{As^7}{3\cdot4\cdot6\cdot7\,a^2} + \frac{fs^9}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot8\cdot9\,a^3} + \ldots$; le costanti

f ed A si determinano colle condizioni del Problema, che fa giungere all'equazione proposta.

Sia l'equazione $\dot{s}(a^2-s^2)^m = a^{2m}\dot{q}$, che integrata riesce $a^m q = \int \dot{s}(a^2-s^2)^m$. In essa includasi questa condizione, che l'integrale $\int \dot{s}(a^2-s^2)^m$ svanisca posto $q=0$, e cercasi il valore generale di q, posto $s=a$. [illegible] m vuolsi sempre numero positivo. Se $m=1$ egli è evidente, che $aq = a^2 s - \frac{s^3}{3}$, onde posto $s=a$ sarà $q = \frac{2a}{3}$. Se $m=2$, diventa $q = \frac{2\cdot4a}{3\cdot5}$; e generalmente il valore di q [illegible] espressione

$$\frac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2ma}{3\cdot5\cdot7\cdots(2m+1)}$$

eguale a quest'altra:

$$\frac{2^m(1\cdot2\cdot3\cdots\cdots m a)}{3\cdot5\cdot7\cdots\cdots(2m+1)}.$$

Il metodo delle interpolazioni determina i valori di q in supposizione che m esprimasi per questa serie $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{2}\cdots$; [illegible] manifestamente introducesi [illegible] circolare. Infatti se pongasi $m=\frac{1}{2}$ [illegible] $\dot{s}\sqrt{a^2-s^2} = a\dot{q}$, cioè $q = \frac{\int\dot{s}\sqrt{a^2-s^2}}{a}$ [illegible] dopo l'integrazione $s=a$, $q = \frac{[illegible]}{a^2}$ [illegible] per il quadrato del raggio. Siccome posta la ragione della periferia al diam.º $\pi:1$, diventa $q = \frac{1\cdot a\pi}{2\cdot2}$. Se $m=\frac{3}{2}$, procedendo col metodo ordinario d'integrazioni e facendo finalmente $s=a$, avrassi $q = \frac{1\cdot3\cdot a\pi}{2(2\cdot4)}$. Se $m=\frac{5}{2}$, $q = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot a\pi}{2(2\cdot4\cdot6)}$, e generalmente sarà

$$q = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots2m\ [illegible]\ a\pi}{2(2\cdot4\cdot6\cdots\cdots(2m+1))}$$

Sebbene alcuna volta le equazioni non possano maneggiarsi, pur tutta volta certe opportune riflessioni servono a dedurne delle conseguenze mirabili e giuste, perchè fondate su certe proprietà generali che convengono alle equazioni d'una determinata specie, ed espressione. Un bell'esempio di quanto s'è detto ne somministra l'Eulero nello Scolio secondo della proposizione 68 Capo 3 Tomo 2 della sua Meccanica, dove dice, che la differenza fra gli archi della discesa e dell'ascesa di un corpo sopra la cicloide ordinaria sta sempre in tanto multiplicata ragione della somma degli archi in quanto multiplicata ragione delle celerità sta la resistenza di un mezzo uniforme purchè sia minima, e la forza sollecitante il corpo sempre costante e parallela; e si esprime così. Denominata l'altezza dovuta alla velocità in ciascun punto di curva v, l'altezza dovuta alla velocità del punto infimo dell'arco della discesa b, la potenza 2, il raggio osculatore nel punto infimo a, l'm l'esponente della ragione, l'arco variabile che principia dal punto primo s, la forza g, e l'esponente della resistenza k, egli è certo questa essere l'equazione fra v e s

$$dv = -\frac{gs\,ds}{a} \pm \frac{v^m ds}{k^m}$$

in cui il segno + del termine ambiguo serve per la discesa, il segno − per l'ascesa. Questo posto si faccia $v = b - \frac{gs^2}{2a} + Q$, che sia l'integrazione della equazione differenziale suddetta. Oggi è chiaro che Q siccome quei termine, che è sempre diviso per k^m quantità grandissima nell'ipotesi della resistenza minima, sarà

sempre piccolissimo per rapporto a b, e a $\frac{gs^2}{2a}$; sicchè dunque v^m sarà uguale trascurandosi il Q a $\left(b-\frac{gs^2}{2a}\right)^m$, dunque $dv = -\frac{gsds}{a} + \frac{ds\left(b-\frac{gs^2}{2a}\right)^m}{k^m}$; ma $dv = -\frac{gsds}{a} + dQ$ per la discesa; perciò $-\frac{gsds}{a} + dQ = -\frac{gsds}{a} + \frac{ds\left(b-\frac{gs^2}{2a}\right)^m}{k^m}$; cioè $Q = \int \frac{(2ab-gs^2)^m ds}{(2ak)^m}$ assumendosi questo integrale in guisa che svanisca posto $s=0$.

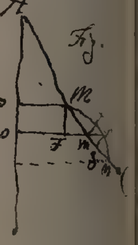
Dunque sostituendo il valore di Q avremo $v = b - \frac{gs^2}{2a} + \int \frac{(2ab-gs^2)^m ds}{(2ak)^m}$. Pongasi $v=0$, e perchè allora diventa prossimamente $s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$ facciasi $s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + q$, sarà $0 = -\frac{gq\sqrt{2ab}}{a\sqrt{g}} + \int \frac{(2ab-gs^2)^m ds}{(2ak)^m}$, poichè si trascurano que' termini ne' quali entra il q^2, onde sarà $q = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2gb}} \times \int \frac{(2ab-gss)^m ds}{(2ak)^m}$ se però dopo l'integrazione porrassi $s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$. Ma perchè in questo stesso valore di q le dimensioni delle quantità $\sqrt{b}$ e s sono $2m$, come è chiaro, avrà q questa forma Nb^m. Sicchè chiamato l'intero arco della discesa E sarà $E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + Nb^m$, e l'arco dell'ascesa $F = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - Nb^m$. Quindi dunque avrassi $E - F = 2Nb^m = \frac{Ng^m(E+F)^{2m}}{2^{3m-1}a^m}$; il numero N otterrassi dalla formola $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2gb}} \int \left(\frac{2ab-gss}{2ak}\right)^m ds$ se dopo l'integrazione

pongasi $s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$. Dunque si ha dimostrato ciò che s'era proposto. Il numero N sarà rationale qualunque volta sarà m numero intiero affermativo, ma se m sarà rotto positivo, e 2m dispari intiero positivo, l'invenzione del Numero N dipende dalla quadratura del cerchio. Generalmente il valore di q coincide con questa espressione $\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m\,ab^m}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2m+1)\,gK^m}$, se m è intiero, e con quest'altra se è rotto, e 2m dispari intiero

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m+1)\,a\pi b^m}{2\cdot(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2m+2))\,gK^m} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2m\,a\pi b^m}{2^{\frac{2m+3}{2}}\left(1\cdot 2\cdot 3\cdots\frac{2m+1}{2}\right)gK^m},$$

posta la ragione della periferia al diametro $\pi:1$.

Qualche volta succede, che si enunziano alcuni problemi, la soluzione de' quali mostra, che non dovevano essere così enunziati. Ne abbiamo un'esempio nella Prop. 75 Tomo 2° della Meca: nica d'Eulero, in cui egli proponesi questo problema (Fig.ª) Trà tutte le curve che congiungono i punti A, e C determinare la AMC tale, che sopra di essa da A à C discendendo un corpo acquisti la massima velocità essendo la resistenza del mezzo uniforme in qualunque moltiplicata ragione delle velocità, e la potenza parimente uniforme all'ingiù tendente e parallela. Per isciogliere questo problema, che cade, come ognuno vede sotto il modo de' massimi e



de' minimi, egli assume ad arbitrio due archetti infinitesimi e contigui nella curva Mm, e mn, e vuole secondo la condizione, che l'incremento della velocità per questi due archetti sia il massimo; onde per il metodo de' massimi e minimi l'incremento della velocità per i due archetti Mm, mn deve essere uguale all'incremento della velocità per due altri qualunque archetti Mn, nn, che nei punti M. n ad angolo infinitesimo siano all'arco Mm inclinati; e quindi ne cava l'equazione per la curva cercata, la quale però in qualunque ipotesi di resistenza non fa mai che svanisca la velocità nemmeno nel punto A deve cominciare il moto. L'equazione dunque non servirebbe se si volesse che il moto cominciasse dalla quiete, al qual quesito soddisfa la sola retta verticale che passa per G, e congiungesi colla orizontale condotta per il punto A sapendosi altronde, acquistare il corpo, che verticalmente discende nel mezzo resistente il massimo incremento di velocità, così che dopo avere percorso quello spazio necessario per l'acquisto di questa massima velocità il residuo lo scorre equabilmente senza ulteriore o accrescimento o diminuzione della velocità acquistata. Questa retta verticale, che soddisfa nel caso del corpo quieto in A non viene esibita in nessun modo dalla equazione, e quella retta verticale che esibisce l'equazione modificata devesi percorrere con moto equabile esiggendo l'equa-

zione che il corpo cominci il suo moto nel punto A colla massima velocità che potrebbe acquistare il corpo cadendo da qualunque smisurata altezza; sicchè nel processo del moto l'incremento della sua velocità è un minimo cioè zero, e non un massimo; devesi dunque cercare il minimo incremento; e siccome il metodo di cui l'Eulero s'è servito dà indifferentemente il massimo e il minimo, ragion vuole per le cose dette che lascisi di investigare il massimo, e si cerchi la curva sopra di cui si generi il minimo incremento di velocità, ovvero sopra di cui il corpo viaggi con moto massimamente uniforme. Il problema dunque perche fosse conforme alla soluzione, doveva essere così proposto: Tra tutte le linee che congiungono i punti A e C determinare quella sopra di cui il corpo mosso acquisti il minimo augmento di velocità, e definire insieme la velocità iniziale in A accomodata a questo quesito.

Sia l'equazione $\frac{dds}{ds^3} = \frac{1}{adx}$, in cui dx è costante, e se ne cerchi l'integrazione. L'integrale del primo membro egli è certo essere $\frac{-1}{2ds^2}$; ma cosa sarà l'integrale di $\frac{1}{adx}$. Io dico, che se si farà in vece di $\frac{1}{adx}$ l'espressione $\frac{dx}{adx^2}$, e si integrerà il numeratore di questa espressione considerando come quantità costante il denominatore avrassi il preciso integrale; onde fia $\frac{-1}{2ds^2} = \frac{x}{adx^2} + C$, in cui C è la costante

da determinarsi. Per dimostrar questo pongasi $ds = p\,dx$, e, poichè dx è costante, $dds = dp\,dx$; i quai valori sostituiti nella equazione proposta daranno $\frac{dp\,dx}{p^3 dx^3} = \frac{1}{a\,dx}$ ovvero $\frac{a\,dp}{p^3} = dx$, onde integrando avrassi $C - \frac{a}{2p^2} = x$. Per determinar la costante suppongasi che svanisca la x fatto $p = 1$, avrassi dunque $C = \frac{a}{2}$, e sostituito questo valore nella equazione sarà $\frac{a}{2} - \frac{a}{2p^2} = x$, la quale ridotta dà $p = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-2x}}$ ma $p = \frac{ds}{dx}$, dunque $ds = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{a-2x}}$, equazione alla Cicloide. Riassumasi ora l'equazione $\frac{-1}{2ds^2} = \frac{x}{a\,dx^2} + C$, la quale sarà legitima, se darà la stessa equazione superiore $ds = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{a-2x}}$ trovata colla sostituzione. Poichè per determinare la costante nella superiore equazione $C - \frac{a}{p^2} = x$ abbiamo supposto che x svanisca posto $p = 1$, bisognerà supporre in questo che x svanisca posto $ds = dx$; ma in questo caso $C = \frac{-1}{2dx^2}$ dunque sostituendo avrassi $\frac{-1}{2ds^2} = \frac{x}{a\,dx^2} - \frac{1}{2dx^2}$, la quale ridotta dà $ds = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{a-2x}}$ la quale equazione è la stessa che sopra abbiamo trovato colla sostituzione; il che indica, che sia legitima l'integrazione $\frac{-1}{2ds^2} = \frac{x}{a\,dx^2} + C$.

~~[illegible] equazione~~
~~[illegible]~~

Se avrassi questa serie $\int \frac{bb\,dt}{bb+tt}$;

$\int \frac{b^2t^2dt}{(bb+tt)^2}$; $\int \frac{b^2t^4dt}{(b^2+t^2)^3}$; $\int \frac{b^2t^6dt}{(b^2+t^2)^4}$ ec.

l'integrale del primo termine sarà un'arco di cerchio del raggio b, e tangente t. Il secondo termine $\int \frac{b^2t^2dt}{(bb+tt)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{b^2dt}{bb+tt} - \frac{\frac{1}{2}b^2t}{bb+tt}$; Il terzo $\int \frac{b^2t^4dt}{(b^2+t^2)^3} =$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\int \frac{b^2dt}{b^2+t^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\,\frac{b^2t}{b^2+t^2} - \frac{\frac{1}{4}b^2t^3}{(b^2+t^2)^2}$;

Il quarto $\int \frac{b^2t^6dt}{(b^2+t^2)^4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\int \frac{b^2dt}{b^2+t^2}$

$-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\,\frac{b^2t}{b^2+t^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{b^2t^3}{(b^2+t^2)^2} - \frac{1}{6}\frac{b^2t^5}{(b^2+t^2)^3}$;

onde si fà nota la legge con cui procedono gli integrali dei termini successivi della serie proposta.

L'integrale di $\frac{dy}{y}$ tanto è ly, quanto $l-y$, equivalendo l'espressione $\frac{-dy}{-y}$ all'espressione $\frac{dy}{y}$. Questo si deve notare, perchè a volte và assunto l'uno, a volte

l'altro integrale ... per ischivare gli immaginarj. Sia per esempio $v = -\int p dy$, in cui p sia funzione di y qualunque, e l'integrale $-\int p dy$ talmente vada assunto, che fatto $y = 0$, v diventi una quantità costante. Indi abbiasi quest'altra equazione $\frac{2dr}{r} = \frac{pdy}{\int pdy}$, in cui r sia una variabile qualunque. Egli è certo, che integrando, se noi facciamo $lr^2 = l\int pdy$, cioè $r^2 = \int pdy$, sostituito il valore di $-v$ in vece di $\int pdy$ sarà $r^2 = -v$, dunque $r = \sqrt{-v}$, il che è un'imaginario, e ripugna spesse volte all'ipotesi, che lo vuole reale; lo che non succede assumendo $l-y$ in vece di ly.

Ogn'uno sa, che le equazioni differenziali integrabili si integrano o colla previa separazione delle indeterminate, o senza tale separazione. Molti metodi sono stati trovati per l'uno e per l'altro caso, ma tutti metodi particolari e idonei solamente alle equazioni di certe speciali forme; perciò egli è sempre bene il tener notati cotesti ripieghi per servirsene nelle occasioni. Qui noteremo alcune equazioni, le quali con opportune sostituzioni si ri=

ducono ai metodi congrui per renderle integrabili. Sia in primo luogo la equazione $xp\,dp + m\,dx\,(1+pp) = dP$. P è funzione di p e delle costanti. Questa si integra, se ciascun termine si moltiplica per $(1+pp)^{\frac{1-2m}{2m}}$, e il suo integrale sarà $m\,(1+pp)^{\frac{1}{2m}}x = \int (1+pp)^{\frac{1-2m}{2m}} dP$. A questa equazione riducesi la equazione $xy\,dy + x^2 dx + y^2 dx = \frac{my\,(x\,dy - y\,dx)}{x}$ colla previa sostituzione di $y = px$; sicchè anche questa sarà integrabile.

La equazione $x^2 dds + x\,dx\,ds - s\,dx^2 = dds + \frac{dx\,ds}{x}$, e tutte quelle in cui una variabile tiene in tutti i termini una sola dimensione si ridurranno al primo grado con la sostituzione di quella variabile a un esponenziale. Nel nostro caso deve essere $s = e^{\int p\,dx}$, in cui e è il numero il cui logaritmo $= 1$

Nella equazione $\rho\rho\, ddT = g^{\frac{\pi - \rho}{\rho}} dg^2 + T dg^2$ e in tutte quelle, che alla medesima forma si potranno ridurre, le indeterminate g, e T sono separabili col seguente metodo. Pongasi $T = vs$, cioè eguale a due altre variabili, e sostituiscansi i valori per

r, e s nella equazione, che ridotta sarà $ppr\,dds + 2pp\,dr\,ds + pp\,s\,ddr = q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}}dq^n + rs\,dq^2$. Scindasi questa equazione, che contiene trè indeterminate in due tali, che riescano le più commode a maneggiarsi, cioè la prima sia $ppr\,dds = rs\,dq^2$, la seconda $2pp\,dr\,ds + pp\,s\,ddr = q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}}dq^n$. Dalla prima equazione trovisi il valore di s dato per q, che sostituiscasi nella seconda equazione, la quale colle opportune riflessioni ridotta darà separate le indeterminate r, e q, come si cercava.

La equazione $\dfrac{mp\,dv + v\,dp}{v^{m+1}} = dp$ si integra dividendo ciascuno membro della equazione per p^2, onde nasca $\dfrac{mp\,dv + v\,dp}{v^{m+1}p^n} = \dfrac{dp}{p^n}$; e integrando $\dfrac{1}{v^m p} = C + \dfrac{1}{p}$ in cui C è la costante da determinarsi. Ma più generalmente sia la equazione $\dfrac{-nq\,dp - p\,dq}{q^{m+1}} = dp$

Moltiplichisi questa equazione per $\dfrac{m}{p^{nm+1}}$,

onde si abbia $-\frac{mp\,dq - mnq\,dp}{q^{m+1}p^{nm+1}} = \frac{m\,dp}{p^{nm+1}}$

l'integrale del primo termine sarà in tal caso $\frac{1}{p^{nm}q^{m}}$; dunque $\frac{1}{p^{nm}q^{m}} = C - \frac{n}{p^{nm}}$.

in cui C, è la solita costante.

La equazione $P\,dq + q\,dP = 2gq\,dp - \frac{2P^{m}q^{m+1}p\,dp}{K^{m}}$, in cui P è dato per p ammette la separazione delle indeterminate se pongasi $q = \frac{1}{P u^{\frac{1}{m}}}$, onde abbiasi l'equazione $du + \frac{2mgu\,dp}{P} = \frac{2mp\,dp}{K^{m}P}$, la quale moltiplicata per $e^{2mg\int\frac{dp}{P}}$, e integrata diventa, $u = \frac{2m e^{-2mg\int\frac{dp}{P}}}{K^{m}} \int \frac{e^{2mg\int\frac{dp}{P}}\,p\,dp}{P}$; onde hassi u dato per p, e in conseguenza q dato per p come si cercava.

Sia la formola generale $\int \frac{z^{\theta m}dz}{(1+bz^{m})^{\nu+\theta}}$, in cui θ esprime tutti i numeri intieri positivi cominciando dal zero. Egli è certissimo, che la formola $\int \frac{z^{\theta m}dz}{(1+bz^{m})^{\nu+\theta}}$ equivale a quest'altra espressione $\frac{(\theta-1)m+1}{bm\cdot(\nu+\theta-1)} \int \frac{z^{(\theta-1)m}dz}{(1+bz^{m})^{\nu+\theta-1}} - \frac{1}{bm(\nu+\theta-1)} \frac{z^{(\theta-1)m+1}}{(1+bz^{m})^{\nu+\theta-1}}$; onde se sarà

$t = 0$, riportandoci alla formola proposta sarà l'espressione $\int \frac{dz}{(1+bz^m)^\nu}$. Se sarà $t=1$, riportandoci all'equivalente avremo $\frac{1}{bm\nu} \int \frac{dz}{(1+bz^m)^\nu} - \frac{1}{bm\nu} \cdot \frac{z}{(1+bz^m)^\nu}$

Se $t=2$ avremo $\frac{1\cdot(m+1)}{b^2m^2\nu(\nu+1)} \int \frac{dz}{(1+bz^m)^\nu}$

$- \frac{(m+1)\, z}{b^2m^2(\nu+1)(1+bz^m)^\nu} - \frac{1\cdot z^{m+1}}{bm(\nu+1)\cdot(1+bz^m)^{\nu+1}}$, ecc.

onde si conosce, ciascuno integrale corrispondente a qualunque valore di t intiero e positivo dipendere dall'integrazione del primo termine $\int \frac{dz}{(1+bz^m)^\nu}$.

La serie $1 - \frac{n}{1\cdot3} + \frac{n(n-1)}{1\cdot2\cdot5} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3\cdot7}$ ecc. ha per somma l'integrale $\int dp\,(1-pp)^n$ se pongasi dopo l'integrazione $p=1$; e quindi dopo l'integrazione fatto $p=1$ sarà generalmente $\int dp\,(1-pp)^{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3} \int dp(1-pp)^n$.

Sia per esempio $n = -\frac{1}{2}$; la formola diventa $\int \frac{dp}{\sqrt{1-pp}} = \frac{\pi}{2}$ dopo fatto $p=1$, in cui π esprime la circonferenza divisa per il diametro $=1$, onde se l'esponente $n = \frac{1}{2}$, per la seconda formola avremo $\int dp\sqrt{1-pp} = \frac{1}{2}\int \frac{dp}{\sqrt{1-pp}} = \frac{\pi}{4}$.

Ogni qualunque volta vuolsi, che data per esempio l'equazione generale $dt = \frac{z^{mq}dz}{(b^m+z^m)^q}$;

e posto dopo l'integrazione $z^m = -b^m$ il valore della variabile t non dipenda dalla costante b, bisognerà ridurre la formola $\frac{z^{mq}dz}{(b^m+z^m)^q}$

all'espressione dell'arco circolare diviso per il raggio. Per ciò fare si ponga $z^{mq}dz = du$ e $(b^m+z^m)^q = \sqrt{b-r}$, onde sostituendo avrassi $dt = \frac{du}{\sqrt{b-r}}$; perché fatto dopo l'integrazione $r=b$, ovvero $z^m=-b^m$ l'integrale $\int\frac{du}{\sqrt{b-r}}$ non includa il b bisogna che la formola $\frac{du}{\sqrt{b-r}}$ sia una funzione di nessuna dimensione delle b, e r; e perciò du deve essere una funzione di dimensione $\frac{1}{2}$ del solo r, perché u non può dipendere da b. Bisogna dunque fare necessariamente $du = \frac{Q\,dr}{\sqrt{r}}$ essendo Q quantità costante indipendente da b. Questo posto sarà l'equazione $dt = \frac{Q\,dr}{\sqrt{br-rr}}$, posto dopo l'integrazione $r=b$, ovvero posta la ragione della periferia al diametro $\pi : 1$, sarà $t = Q\pi$ il qual valore resta perpetuamente il medesimo in qualunque modo si cangi il b.

Per mezzo di questa riflessione si sciolgono elegantemente i problemi che riguardano la determinazione delle curve isocrone in qualunque ipotesi di forza centrale e di mezzo resistente.

Il profondissimo Geometra Sig.r Leonardo Eulero Membro onoratissimo della Regia Società di Berlino espone un metodo ingegnosissimo nel Tomo 2.° della sua Meccanica, con il quale determina le curve isocrone in ipotesi che il corpo sollecitato da una potenza uniforme discenda in un mezzo rarissimo, che resista in qualunque moltiplicata ragione delle celerità. Noi deliberemo dal suo metodo alcune cose che appartengono alla pura Analisi, le quali fia bene registrare attesa l'utilità che da esse massima ne proviene specialmente nelle operazioni del calcolo. Sia dunque proposta la equazione

$$C\int\frac{ds\,(f^n - s^n)}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = -a^m\int\frac{ds\int(f^2-s^2)^m ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$$

; la quale equazione debba valere solamente quando dopo l'integrazione si pone $s=f$; e cerchisi il valore della indeterminata C; e dell'indeterminato esponente della prima formula n. Dopo l'integrazione posto $s=f$; egli è certo,

che il valore di $\int \frac{ds(f^n - s^n)}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$ è un moltiplo della podestà dello stesso f, il cui esponente è $n-2$; così l'altro integrale $\int \frac{ds \int (f^2-s^2)^m ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$ posto $s=f$ dà un moltiplo della podestà dello stesso f, il cui esponente è $2m-1$. Perchè dunque vaglia l'equazione proposta non potendo dipendere C da f, bisogna, che sieno eguali gli esponenti di f; dunque deve essere $n = 2m+1$, e C talmente va preso, che si distruggano le potestà di f, delle quali il commune esponente sarà $2m-1$. Perchè appaja quali coefficienti debbano avere le podestà di f bisogna ripeterlo dai casi più semplici, onde poi formarne il termine generale. Integrate dunque le seguenti formole in modo che svaniscano posto $s=0$ (condizione necessaria), indi fatto $s=f$ troveransi, che $\int \frac{(f-s)\, ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = f^{-1}$; e $\int \frac{(f^3-s^3)ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{1} f$; e $\int \frac{(f^5-s^5)\,ds}{(ff-s^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3} f^3$:

e quindi sarà generalmente $\int \frac{(f^{2m+1} - s^{2m+1})ds}{(ff+ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2m}{1\cdot 3\cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m-1)} f^{2m-1}$; onde sarà

$$\mathfrak{C}\int \frac{ds\,(f^n-s^n)}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2m}{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2m-1)}\,\mathfrak{C}f^{2m-1}$$

Il coefficiente dell'altro termine si farà noto dalla medesima analogia. Imperciocchè sarà $\int(f^2-s^2)^m ds$ talmente instituita l'integrazione, che l'integrale svanisca posto $s=f$ (altra necessaria condizione) sarà dissi per serie $=$

$$-f^{2m}(f-s)+\frac{m}{1\cdot3}f^{2m-2}(f^3-s^3)-\frac{m(m-1)}{1\cdot2\cdot5}f^{2m-4}(f^5-s^5)+\text{ec.}$$

Questa serie dunque moltiplicata per $\frac{-\delta^m ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$ e integrata, indi posto $s=f$

avrassi $\delta^m f^{2m-1}\left(1-\frac{2m}{1\cdot3}+\frac{4m(m-1)}{1\cdot3\cdot5}-\frac{8m(m-1)(m-2)}{1\cdot3\cdot5\cdot7}\text{ ec.}\right)$

$=$ alla seconda formola proposta. Ma la serie $1-\frac{2m}{1\cdot3}+\frac{4m(m-1)}{1\cdot3\cdot5}$ ec. è eguale alla frazione $\frac{1}{2m+1}$; come a posteriori si conosce dando qualunque valore intiero a m; e come anche si deduce dal metodo di sommare le serie, che il medesimo Sig.r Eulero ha esposto elegantemente negli Atti di Pietroburgo. Dunque valerà l'equazione $\mathfrak{C}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2m+1)\,\delta^m}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdots\cdots2m(2m+1)}$. Il che doveva trovarsi

Ma ponendo l'esponente m = a un rotto di questa serie $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$ la formola generale $B\int \frac{ds(f^{2m+1} - s^{2m+1})}{(f^2 - s^2)^{\frac{3}{2}}}$ intrude archi circolari, e il valore della indeterminata B devesi trovare col metodo delle interpolazioni, il quale dà in tal caso il valore generale di B =

$$\frac{2(2\cdot 4\cdot 6 \ldots\ldots (2m-1)\, l^m}{1\cdot 3\cdot 5 \ldots\ldots 2m(2m+1)\pi}$$

esprimendo $\pi : 1$ la ragione della circonferenza al diametro; ove è da notarsi, che ponendo $m = \frac{1}{2}$ poichè diventa $2m-1 = 0$ parerebbe a prima vista, che dovesse svanire il numeratore del termine generale; ma bisogna avvertire che, poichè deesi moltiplicare $2\cdot 4\cdot 6$ eccetera fino a zero non potrassi giungere allo stesso zero senza che l'ultimo fattore in cui devesi moltiplicare il prodotto de' precedenti sia realmente infinito; giacchè per passare da una serie di quantità positive sempre crescente a una quantità negativa bisogna passare per l'infinito, e per l'infinito ancora si dovrà passare per arrivare al zero: onde si deduce,

che la serie de' moltiplicatori 2·4·6 ... fino a zero esclusivamente darà un prodotto infinito, il quale moltiplicato in (2m-1) cioè in zero lascierà una quantità finita, la quale come ricavasi dall'integrazione della formola che in ipotesi di $m = \frac{1}{2}$ diventa $\int \frac{ds}{\sqrt{f^2 - s^2}}$ espressione dell'arco circolare, è uguale all'unità; dunque il numeratore del termine generale in questa supposizione sarà 2, e il denominatore 1·2π, onde il valore di C in questo caso è $= \frac{d}{\pi}$. Se invece di m si sostituisce $\frac{2n+1}{2}$ il valore generale di C si cangia in quest'altra espressione

$$\frac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdot2n\,d^{\frac{2n+1}{2}}}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)(n+1)\,\pi},$$

nella quale i valori di n espressi da questa serie Aritmetica 0; 1; 2; 3; 4 ... corrispondono ai valori della serie di m $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{2}$; $\frac{9}{2}$ ...;

Onde si fà nota la legge con cui procedono i valori di C.

Sia la frazione $\int \frac{ds}{(ss+1)^n}$; in cui n esprima un numero di questa serie 1, 2, 3, 4 ...; l'integrale della formola debba prendersi in guisa, che svanisca posto $s=0$, e cercasi il valore della frazione posto $s=1$. Se $n=1$ la formola diventa $\int \frac{ds}{ss+1}$, arco circolare diviso per il raggio; e perciò l'espressione di questo integrale posto $s=1$ sarà $\frac{1\cdot\pi}{2}$; se $n=2$; $\int \frac{ds}{(s^2+1)^2}$ posto dopo l'integrazione $s=1$ diventa $\frac{1\cdot\pi}{2\cdot2}$; se $n=3$, diventa la formola $\frac{1\cdot3\cdot\pi}{2\cdot4\cdot2}$, e generalmente

$$\int \frac{ds}{(ss+1)^n} = \frac{1\cdot3\cdot5 - - - - - (2n-3)\pi}{2\cdot4\cdot6 - - - - - (2n-2)2},$$

in cui non si conosce il caso di $n=1$, benchè si sappia, sopra essersi trovato allora il valore della frazione $= \frac{1\cdot\pi}{2}$.

Sia la equazione $\frac{s}{e^s} = t$, e cerchisi il valore di t posto $s=\infty$. Riducendo la equazione sotto i logaritmi,

ella diventa $ls - s = lt$; ma siccome per proprietà della logistica, le ordinate crescono in proporzione Geometrica mentre le ascisse crescono in proporzione Aritmetica; dunque le ascisse sono sempre minori delle ordinate ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~; e perciò posta anche l'ordinata infinita ella sarà maggiore dell'infinita recisa corrispondente; dunque $ls < s$, e perciò $ls - s = -\infty$; dunque $lt = -\infty$; e quindi $t = 0$. Onde si conosce, che e^s è sempre infinitamente maggiore di s quando pongasi s infinita.

Data una qualunque curva, se si cerca una altra curva da aggiungersi alla prima nel principio dell'asse in modo, che presi due archi eguali, uno nella curva data e l'altro nella cercata si verifichi nel fine di ciascuno una certa condizione, egli è certo, che infinite curve possono soddisfare, e tra queste, infinite ve ne saranno, che soddisfaranno al quesito, ma non costituiranno una curva continua colla data, come pure alcune altre infinite, che oltre il soddisfare al quesito,

formeranno colla data una medesima continuazione. Ecco il metodo per trovare queste curve continue anche senza che suppongasi una curva data, e se ne cerchi la sua continua. Sia $dt = e^{-\frac{2s}{k}} dx$ la equazione, che dà la condizione voluta nel Problema, in cui x esprime le recise dalla parte della curva positiva, t le recise dalla parte della continua, s l'arco della curva positiva, $-s$ l'arco negativo della continua. Ora perchè secondo la condizione la curva deve essere continua bisogna che l'equazione tra gli archi e le recise della curva positiva sia talmente fatta, che se in essa ponesi $-s$ in vece di s, x diventi t, proprietà caratteristica della curva continua. Pongasi dunque $dx = Mds$, in cui M sia funzione di s, e M diventi N posto $-s$ in vece di s. Se dunque ponesi $-s$ in vece di s, x diventa t, e l'equazione fittizia sarà $dt = -Nds$; ma $dt = e^{-\frac{2s}{k}} dx = e^{-\frac{2s}{k}} Mds$; dunque $N = -e^{-\frac{2s}{k}} M$. Sia in oltre $M = e^{\frac{s}{k}} P$ e P si cangi in Q posto $-s$ in vece di s.

sarà $N = e^{-\frac{s}{k}}Q$, i quai valori sosti:
tuiti in vece di M e di N proverrà
$Q = -P$. Onde appare che P deve
essere funzione di s, che si cangi
in $-P$ posto $-s$ in luogo di s, e per:
ciò queste funzioni devono essere
dispari come è evidente. Sia per:
tanto P qualunque funzione dispa
ri di s, come sono per esempio
as, as^3, as^5 ecc., e sarà $Mds =$
$e^{\frac{s}{k}}Pds$, ovvero $x = \int e^{\frac{s}{k}}Pds$.
la quale è l'equazione per la cur:
va cercata. Se vuolsi questa
equazione libera dagli esponenziali
prendanosi i logaritmi nella equazio:
ne differenziale $dx = e^{\frac{s}{k}}Pds$,
e sarà $l dx = \frac{s}{k} + lP + lds$. Si diffe
renzj di nuovo questa equazione posto
ds costante, e nascerà $\frac{ddx}{dx} = \frac{ds}{k} + \frac{dP}{P}$,
ovvero $kPddx = Pdxds + kdxdP$. la
quale equazione è libera dagli espo:
nenziali.

Suppongasi ora che la condizione
voluta negli archi di queste curve

esibisca queste due equazioni $r = e^{\frac{v}{2k}} + e^{\frac{-s}{2k}}$, e $e^{\frac{-s}{k}} dx = e^{\frac{v}{k}} dt$, in cui s esprime l'arco positivo della curva data, x la sua recisa corrispondente, r l'arco della curva aggiunta, e t la sua recisa. egli è certo, che siccome dalla curva data abbiamo x dato per s, e per la prima delle sudette equazioni abbiamo s dato per r, dunque averemo anche x dato per r, i quai valori dati per r sostituiti nel primo membro della seconda equazione ne somministreranno l'equazione alla curva aggiunta, nella quale osserverannosi le condizioni del Problema. Questa curva però non formerà generalmente una curva continua colla data, e sarà accidente, che data per esempio una curva che abbia la tangente orizontale nel punto dell'asse, ove ànno origine gli archi e le recise, sia reale la curva da aggiungersi e non più tosto immaginaria. Sicchè dunque la condizione della continuità della curva non viene inclusa nelle proposte condizioni del problema, e perciò quando

oltre le condizioni proposte vuolsi una curva continua, non si potrà assumere nissun arco di curva data ma la medesima curva, che prima era data, cioè l'equazione tra s, e x bisognerà dedurla da questa novella condizione, la quale altro non importa, se non che le equazioni tra v, e t, e tra x, e s si comprendano sotto la medesima equazione, cosichè sostituito $-v$ in vece di s, x diventi t. Per ottener ciò prendasi una nuova variabile z, per mezzo di cui si ottenga l'arco positivo quando z è positiva, e l'arco negativo, quando z è negativa. Per la qual cosa bisogna che s sia tale funzione di z, che posto $-z$ in vece di z, s diventi $-v$, cioè l'arco negativo. Si ponga $e^{\frac{-s}{nk}} = 1+Q$, sarà per la prima delle due equazioni già trovate $e^{\frac{v}{nk}} = 1-Q$, e perciò Q sarà funzione dispari di z, perchè si cangia nel suo negativo fatto $z=-z$, ovvero $-s=v$. Sarà pertanto

$e^{-\frac{s}{k}} = (1+Q)^n$, e $e^{\frac{r}{k}} = (1-Q)^n$, e quindi $dx(1+Q)^n = dt(1-Q)^n$; ma se deve essere tale funzione di z, che si muti in t posto z negativo; pongasi perciò $dx = Mdz$, e si cangi M in N fatto z negativo; sarà dunque $dt = -Ndz$. Per la qual cosa diverrà $M(1+Q)^n = -N(1-Q)^n$. Sia dunque $M = P(1-Q)^n$ essendo P eguale a una funzione dispari di z, e allora sarà $N = -P(1+Q)^n$, nella quale equazione sostituito il valore di P dato dalla superiore $M = P(1-Q)^n$ avrassi $M(1+Q)^n = -N(1-Q)^n$, la quale è la medesima colla superiore, che cavata abbiamo dalle condizioni esposte. Prese dunque ad arbitrio invece di P, e Q funzioni dispari di z, sarà sostituendo nell'equazione superiore $dx = Mdz$ il valore di $M = P(1-Q)^n$ averassi $x = \int Pdz(1-Q)^n$ e siccome sopra si è trovato $e^{-\frac{s}{k}} = (1+Q)^n$, cioè $s = nk\, l\frac{1}{1+Q}$, così sostituendo in

questa ultima il valore di z dato per x nell' equazione antecedente, si avrà l'equazione per la curva cercata frà s, e x, come era proposto. Pongasi per maggior semplicità $Q = -z$, sarà $s = 2k\,l\frac{1}{1-z}$, e $x = \int Pdz(1+z)^2$ Ma posto $z = 0$ diventa $s = 2k\,l1$, cioè $s = 0$, e perciò anche $x = 0$; dunque $\int Pdx(1+z)^2$ deve assumersi in modo, che svanisca posto $z = 0$.; e siccome $s = 2k\,l\frac{1}{1-z}$, sarà differenziando $ds = \frac{2k\,dz}{1-z}$, e $dx = Pdz(1+z)^2$; dunque $\frac{ds}{dx} = \frac{2k}{P(1-z^2)(1+z)}$; bisogna dunque, perchè la curva sia reale, che $P(1-z^2)(1+z)$ sia sempre minore di $2k$. Ma posto $z = 0$ diventa $\frac{ds}{dx} = \frac{2k}{P}$, dunque ~~perciò~~ $P \not< 2k$, e se $P = 0$ la curva nel punto ove hanno origine gli archi e le recise averà la tangente orizontali. Ove è da notarsi, che siccome P e Q sono arbitrarie purchè siano funzioni dispari di z, così innumerabili sono le curve continue, che osservano la condizione voluta

Sia la equazione $(2f+k)^2 dt =$

$$\frac{-2kf\,(2f+k)\,dr + 4fk^2 e^{\frac{v}{k}} dr}{e^{\frac{v}{2k}}\sqrt{4ff+2fk-2fke^{\frac{v}{k}}}}$$, e si

cerchi la sua riduzione caso che k sia infinito. A buon conto perchè $2f$ è incomparabile rispetto a k la equazione divisa indi per k^2 si cangia in quest'altra

$$dt = \frac{-2f\,dr + 4f\,e^{\frac{v}{k}} dr}{e^{\frac{v}{2k}}\sqrt{4ff+2fk-2fke^{\frac{v}{k}}}}$$ Esprimasi in serie il valore di $e^{\frac{v}{k}}$, e avrassi

$e^{\frac{v}{k}} = 1 + \frac{v}{k} + \frac{v^2}{1.2.k^2} \ldots$, e così sarà

$e^{\frac{v}{2k}} = 1 + \frac{v}{2k} + \frac{v^2}{1.2.4k^2} + \ldots$, i quai valori

sostituiti daranno $dt = \dfrac{-2f\,dr + 4f\,dr\left(1+\frac{v}{k}+\frac{v^2}{1.2k^2}+\ldots\right)}{\left(1+\frac{v}{2k}+\frac{v^2}{1.2.4k^2}\ldots\right)\sqrt{4ff+2fk-2fk\left(1+\frac{v}{k}+\ldots\right)}}$

Ora avvertasi che nel secondo termine del numeratore posto k infinito tutti i termini della serie $1+\frac{v}{k}+\ldots$ svaniscono fuorichè il primo , il che dicasi ancora della serie $1+\frac{v}{2k}+\frac{v^2}{1.2.4k^2}\ldots$ del denominatore; ma rispetto a quella che resta moltiplicata per

l'ultimo termine, che è sotto il segno radicale, siccome $-2fk \times 1$ resta eliso dal positivo anteriore $2fk$, e $-2fk \times \frac{r}{k}$ resta finito, dove tutti i susseguenti svaniscono perchè resta k nel denominatore, perciò l'equazione diventerà

$$d\theta = \frac{-2fdr \quad +4fdr\,(1+0)}{(1+0)\sqrt{4ff+2fk-2fk\left(1+\frac{r}{k}+0\right)}},$$

cioè $$d\theta = \frac{dr\sqrt{2f}}{\sqrt{2f-r}}.$$

Nel penultimo paragrafo abbiamo insegnato un metodo, per mezzo del quale trovasi trà le infinite una curva continua, che soddisfa alle condizioni proposte. Qui applicheremo il metodo à un'altro esempio, perchè riesca sempre più chiaro il modo d'applicarlo. Siano dunque le due equazioni trovate per la condizione del Problema queste $ke^{\frac{r}{2k}} - ke^{\frac{-s}{2k}} = \sqrt{2f}\int e^{-\frac{s}{k}}dx$, e $e^{\frac{r}{k}}d\theta = e^{\frac{-s}{k}}dx$, nelle quali le variabili sono le stesse che sopra, e cerchisi la equazione tra le s e le x. Perchè la curva deve essere continua, bisogna che la equa:

zione trà s, e x sia talmente conformata, che se x si cangia in t, s diventi $-r$. Assumasi perciò una nuova variabile z, di cui le s, e le x siano funzioni tali, che fatto z negativo x diventi t, e s diventi $-r$. Sia $\int e^{-\frac{s}{k}}dx = z^2$, sarà $ke^{\frac{r}{2k}} - ke^{\frac{-s}{2k}} = z\sqrt{2f}$; imperciochè fatto z negativo, nel qual caso r si fa $-s$, e $-s$ si fa r, nascerà questa equazione $ke^{\frac{-s}{2k}} - ke^{\frac{r}{2k}} = -z\sqrt{2f}$, la quale equazione è la stessa colla superiore. Sia P qualunque funzione pari di z, la quale non si muta eziandio se in luogo di z pongasi $-z$, e si faccia $ke^{\frac{-s}{2k}} = -\frac{1}{2}z\sqrt{2f} + P$, lo che posto, s'avrà soddisfatto al quesito. Poichè facendo z negativo $-s$ diventa r, ed avrassi $ke^{\frac{r}{2k}} = \frac{1}{2}z\sqrt{2f} + P$, e sottraendo da questa la superiore si farà $ke^{\frac{r}{2k}} - ke^{\frac{-s}{2k}} = z\sqrt{2f}$, come si cerca. All'altra equazione ~~soddisfasi~~ $\int e^{\frac{r}{k}}dt = \int e^{\frac{-s}{k}}dx$ soddisfasi colla equazione $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = z^2$; poichè posto z negativo, e dt in vece di dx, e r in vece di $-s$ nascerà $\int e^{\frac{r}{k}}dt = z^2 = \int e^{\frac{-s}{k}}dx$. Dunque per mezzo della caz.

viabile z, di cui P è funzione pari, si determina la curva continua dovendo essere $e^{-\frac{s}{2k}} = -\frac{z\sqrt{2f}}{2k} + \frac{P}{k}$, e $dx = 2e^{\frac{s}{k}} z\,dz = \frac{8k^2 z\,dz}{(2P - z\sqrt{2f})^2}$. Sarà dunque $x = 8k^2 \int \frac{z\,dz}{(2P - z\sqrt{2f})^2}$, e $s = 2k \int \frac{2k}{2P - z\sqrt{2f}}$, e posto per osservare l'omogeneità $z = \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{f}}$, indi fatte le sostituzioni, avremo $s = 2k\int \frac{k}{P-u}$, e $x = \frac{4k^2}{f}\int \frac{u\,du}{(P-u)^2}$. Onde si fa chiaro, che essendo arbitraria la funzione P pari di z, infinite sono le curve continue, che osservano le condizioni nel Problema proposte.

Sia la formola $\int \frac{ds}{\sqrt{v}}$, in cui ds esprime l'elemento dell'arco della curva, e v una affezione variabile della curva medesima, che suppongasi diventi b quando $s = 0$, e cerchisi l'equazione di questa curva medesima nella quale ponendo poi nella formola

$\int \frac{ds}{\sqrt{v}}$, dopo l'integrazione $v=0$, essa formola sia una quantità costante, e indipendente da b. Dunque questa quantità b non deve entrare nè nell'espressione $\int \frac{ds}{\sqrt{v}}$ posto dopo l'integrazione $v=0$, nè nella equazione della curva, giacchè ella deve produrre la medesima espressione di $\int \frac{ds}{\sqrt{v}}$ posto dopo l'integrazione $v=0$, comunque variisi il b, cioè variisi l'arco della curva, alla fine del quale si voglia la condizione. Assumasi la variabile z, e v sia quantità composta della lettera z, che appartiene alla curva, e non involve b, e della lettera h, che è composta di b, e dell'altre costanti. Sia v tale funzione di h, e z, che svanisca posto $z=h$, e diventi b posto $z=\theta h$ essendo θ un qualunque numero. Pongasi poi $ds=pdz$ per l'equazione della curva cercata, dovrà p essere tale quantità che in essa non contengasi nè b, ne h, come vuolsi di sopra. Si cangierà dunque

la formola $\int \frac{ds}{\sqrt{v}}$ fatta la sostituzione in questa altra $\int \frac{p\,dz}{\sqrt{v}}$, talmente preso questo integrale, che svanisca posto $v = 6$, ovvero $z = \delta h$. Indi questo integrale sarà l'espressione costante cercata, se in esso dopo l'integrazione pongasi $z = h$, nella quale non potrà trovarvisi l'h. Ma questo succederà qualunque volta sarà $\int \frac{p\,dz}{\sqrt{v}}$ funzione di nessuna dimensione delle stesse h, e z ovvero anche se tale sarà $\frac{pz}{\sqrt{v}}$. Sia v funzione m di dimensioni delle stesse h, e z, dovrà essere $p = Cz^{\frac{m-2}{2}}$ in cui C dinota una quantità costante independente da δ. Qualunque volta dunque se sarà trovata v = a una tale funzione, l'equazione della curva cercata sarà $ds = Cz^{\frac{m-2}{2}} dz$. Dal fin qui detto se ne inferisce, che perchè questo metodo si possa adoprare bisogna che lo v sia espresso da quantità finite, e che questa espressione si possa cangiare in una funzione omogenea delle h, e z.

Quando nelle equazioni differenziali di secondo grado non v'entra che una indeterminata, mancando l'altra, e solamente insinuandovisi i suoi differenziali, con una semplice sostituzione si può far passare l'equazione di secondo grado a quella del primo; come per esempio in questa equazione $Pdy^n = Qdv^n + dv^{n-2}ddv$, in cui P, e Q sono funzioni di y, e in cui dy è costante perchè manca l'indeterminata v, se porrassi $dv = zdy$, l'equazione dopo aver surrogati i valori si ridurrà a quest'altra $Pdy = Qz^n dy + z^{n-2}dz$, la quale è semplicemente differenziale. Per ottenere poi, che in alcune equazioni, le quali includono tutte e due le indeterminate, almeno una ne svanisca, onde si rendano poi soggette alla regola superiore, molto giova l'introduzione delle quantità esponenziali, per mezzo delle quali si ha l'intento in tre generi di equazioni differenziali di secondo grado. Il primo genere è di tutte quelle equazioni, che non costano di più di due termini, e si compren=

dono sotto questa equazione cattolica $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy$, in cui ponesi costante dx. Per ridurre la quale pongasi $x = c^{\theta v}$, e $y = c^v t$, in di fatte le sostituzioni opportune determinisi l' θ in modo, che si tolgano gli esponenziali dall' equazione. Ciò fatto ella ridurrassi a un' altra equazione, in cui manca l'una delle due indeterminate, e perciò riducibile. Il secondo genere di equazioni differenziali di secondo grado, che si possono al primo grado ridurre, comprende quelle che in ciascun termine tengono il medesimo numero di dimensioni, che costituiscono le indeterminate, e i loro differenziali, e si comprendono sotto questa equazione cattolica $ax^m y^{-m-1} dx^p dy^{2-p} + bx^n y^{-n-1} dx^b dy^{2-b} = ddy$, in cui è costante dx. Le sostituzioni da farsi sono $x = c^v$, $y = c^v t$. Il terzo genere di equazioni, che cadono sotto a questo metodo, abbraccia quelle, delle quali in ciascun termine l'una delle indeterminate tiene il medesimo numero

di dimensioni. Quivi due casi deono distinguersi secondo che il differenziale di questa stessa variabile si è assunto costante, o nò. Al primo caso apparti=ene questa equazione universale $Px^m dy^{m+n} + Qx^{m-b} dx^b dy^{m+n-b} = dx^m ddy$, in cui P, e Q sono funzioni di y. Per ridurre questa basta una sostituzione, cioè $x = c^v$ L'altro caso riguarda la seguente generale equazione $Px^m dy^{m+1} + Qx^{m-b} dx^b dy^{m-b+1} = dx^{m-1} ddx$. In cui ponesi dy costante. La medesima sostituzione di $x = c^v$ serve a ridurre anche questa soggetta alla regola sudetta. Il metodo fin qui esposto si estende anche alle equazioni di 3.° grado differenziali, le quali purchè siano affette delle sudette condizioni saranno al secondo grado ridu=cibili, e così gioverà il metodo nelle equa=zioni differenziali di ulterior ordine, sicco=me anche nelle equazioni differenziali del primo per farne l'integrazione, onde si conosce l'uso degli esponenziali intro=dotti opportunamente nelle equazioni differenziali.

punto di
Qualunque curva posta nel medesimo piano coll'asse assunto si considera secondo la distanza dal principio dell'asse, e secondo l'altezza sopra il medesimo asse, cioè secondo la lunghezza e la larghezza della curva. Se dunque intendasi una curva in diverso piano posta da un piano assunto, oltre la lunghezza e la larghezza anderà anche considerata l'altezza del punto sopra del piano assunto; e perciò i luoghi alle superficie saranno espressi da equazioni che contengono tre indeterminate, e si comprenderanno tutti sotto questa equazione ecumenica $dz = Pdx + Qdy$, in cui x esprime le recise variabili nel piano assunto, y le ordinate variabili nel medesimo piano, e z le altezze del punto della curva dal piano dato P, e Q sono quantità dipendenti da x, y, e z, e le costanti.
Fatto $y = a$ una costante, se il piano assunto è verticale, si ha la proiezione orizontale,

cioè quella curva che nasce tagliando la superficie con un piano orizontale. Fatto $z = 0$ si hà la projezione verticale, cioè la sezione che lascia un piano verticale che taglia la superficie; se si fa $x = 0$ si hà l'altra sezione verticale perpendicolare alle due antidette sezioni. Onde si conosce, che data la natura della superficie, sono date le tre sezioni .; e date due di queste projezioni, le equazioni, che queste due curve esprimono, congiunte danno la equazione alla superficie. Trè sorte di solidi si possono considerare, solidi cilindrici, conoidi, e solidi rotondi. Per solido cilindrico, o cilindroide intendasi quel solido, che formasi congiungendo due piani curvi simili, eguali e paralleli con linee parallelle, e per conoide intendasi il solido che nasce tirando da ciascun punto di un piano curvo linee a un punto fisso. Per solidi rotondi finalmente ~~finalmente~~ intendanosi quei solidi che sono generati dalla rivoluzione di un piano curvo attorno il suo asse. Questo posto

se ci mettiamo a esaminare i solidi cilindrici, noi vediamo, che tutte le sezioni parallelle sono simili ed eguali trà loro, per le quali ponendo $dz = 0$ sarà l'equazione $Pdx + Qdy = 0$ per le sezioni orizontali, le quali perchè devono essere sempre eguali qualunque sia il z bisogna che P, e Q non dipendano che da x, e da y, altrimente questa egualità non sarebbe. Posto $y = 0$ la projezione verticale è un rettangolo, dunque il z costante, e perciò $dz = 0$, onde $Pdx = 0$, e congiungendo le due equazioni avremo l'equazione per la superficie cilindrica $Pdx + Qdy = 0$, e $\int Pdx + \int Qdy = \text{Costante}$ Sicchè dunque nell'equazione generale $dz = Pdx + Qdy$ bisogna considerare P e Q quantità infinite, benchè realmente non sieno tali, e con questa riflessione si potrà investigare la soluzione di qualunque problema spettante alle superficie cilindriche. Riguardo le superficie coniche bisogna considerare,

che tutte le sezioni normali all' asse sono curve simili tra di loro, e i loro lati omologhi sono in ragione delle distanze dal polo, sicchè dunque posto nell'equazione a tali superficie in vece di x, e di y un moltiplo di x, e di y, e in conseguenza in vece di z un moltiplo eguale di z bisogna che resti la medesima equazione cioè ponendo in vece di x il moltiplo mx mz in vece di z, my in vece di y deve la equazione rimanere la stessa, così portando la natura della similitudine delle sezioni. Ma questa proprietà non si verifica, se le indeterminate in ciascun termine non mantengono il medesimo numero di dimensioni. Dunque le equazioni alle superficie coniche saranno talmente conformate, onde per esempio $\frac{x}{z}$ sarà eguale a una funzione di x, y e z di dimensioni zero. Sia il numero delle dimensioni, che conservano le indeterminate in ciascun termine n, e sia la equazione alle superficie coniche

$Pdx = Rdz + Qdy$. Per le cose dette altrove ella avrà questa proprietà $Rz + Qy = n\int Pdx$, ovvero $Rdz + Qdy = \frac{zdR + ydQ}{n-1}$. Onde si può conchiudere se la data equazione sia a una superficie di questa sorte. Per le superficie rotonde osservo, che le sezioni orizzontali sono circoli; bisogna dunque che fatto z costante cioè $dz = 0$ abbiasi l'equazione al circolo $xdx + ydy = 0$; dunque $P = \frac{x}{Z}$, e $Q = \frac{y}{Z}$ in cui Z è qualunque funzione di z; sarà perciò l'equazione per tali superficie $Zdz = xdx + ydy$, e $\int Zdz = x^2 + y^2$. Queste sono le superficie, le cui equazioni si maneggiano con qualche facilità, e che ammettono la soluzione di molti eleganti problemi, come quei delle linee brevissime sopra queste medesime superficie, del moto turbinatorio sopra le rotonde, di cui ne parlò il chiarissimo Sigr Giovanni Bernulli negli Atti di Lipsia A. 1719. e d'altri molti.

Guglielmo Ougtredo nella sua Chiave della Matematica si serve di alcune ligature, ovvero compendi di caratteri per le operazioni analitiche, e ne cava moltissime utilità, tra le quali una si è il cavare le radici quadrate dai Binomi, i cui membri sono incommensurabili, ma però commensurabili i loro quadrati. Siano per esempio A+E due quantità, la cui somma si esprima col carattere compendioso Z, la differenza cioè A−E col carattere compendioso X, il quadrato della somma Z^2, il quadrato della differenza X^2, la somma de quadrati Z, la differenza de quadrati X, la somma dei cubi Z, la differenza de' cubi X, il loro rettangolo Æ. Quindi nascono subito moltissime equazioni

$$Z = A+E \qquad X = A-E$$
$$Z = A^2+E^2 \qquad X = A^2-E^2$$
$$Z+X = 2A \qquad Z-X = 2E$$

& cetera & cetera

tra le quali scelte le più opportune arriva l'Ugtredo a questa finale

$$\sqrt{\frac{Z+X}{2}} = A \; ; \; \sqrt{\frac{Z-X}{2}} = E \; ;$$

trova
mà $X\mathcal{O} = \sqrt{Z\mathcal{O}^2 - 4AE^2}$, dunque sostituendo avrassi quest'altra

$$\sqrt{\frac{Z\mathcal{O}+\sqrt{Z\mathcal{O}^2-4AE^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{Z\mathcal{O}-\sqrt{Z\mathcal{O}^2-4AE^2}}{2}} = A \pm E;$$

onde data la somma de' quadrati e il rettangolo di due quantità, per mezzo di questa equazione si ritrovano le stesse quantità; ma siccome ne' binomj suddetti da cui vuolsi estrarre la radice noi abbiamo la somma de' quadrati, e il rettangolo delle quantità dunque averemo le medesime quantità, cioè la radice del Binomio proposto. Sia, per esempio il Binomio $27 \pm \sqrt{704}$, da cui vuolsi la radice quadrata. In lettere speciose esso deve aver questa forma $A^2 \pm$ $\pm 2AE + E^2$, dunque confrontando $A^2 + E^2 = 27$, $2AE = \sqrt{704}$, si hanno ~~dunque~~ per dati la somma dei quadrati $Z\mathcal{O} = 27$, e il rettangolo $AE = \frac{\sqrt{704}}{2}$; dunque avrassi per la equazione canonica sudetta A. ed E, e in conseguenza la radice del Binomio proposto.

Codesto metodo viene esteso dal Sig.r Giovanni Wallis per la risoluzione delle Equazioni Cubiche in questa maniera. Avverte che siccome $Z = A+E$, così $Z^3 = A^3+3A^2E+3AE^2+E^3$, cioè facendo uso delle note compendiarie $Z^3 = \mathcal{Z}+3\text{Æ}Z$, e perciò $Z^3-3\text{Æ}Z = \mathcal{Z}$, in cui il coefficiente 3Æ è il triplo del rettangolo delle due quantità A, E, e la quantità assoluta $\mathcal{Z}$ è la somma dei loro cubi. Parimente poichè $X = A-E$, sarà $X^3 = A^3-3A^2E+3AE^2-E^3$, ovvero in compendio $X^3 = \mathcal{X}-3\text{Æ}X$, cioè $X^3+3\text{Æ}X = \mathcal{X}$, ove 3Æ è, come sopra il triplo del rettangolo di A, E, delle quali $\mathcal{X}$ riesce la differenza de' Cubi. Le forme $X^3+3\text{Æ}X = -\mathcal{X}$; $Z^3-3\text{Æ}Z = -\mathcal{Z}$, in cui $-\mathcal{X}$, $-\mathcal{Z}$ sono quantità negative non differiscono in altro dalle prime che, dove in quelle la radice è affermativa in queste è negativa, per la mutazione del segno del quarto termine, da cui ciò si inferire. Ora ciò posto giacche tutte le equazioni cubiche si possono ridurre (tolto il secondo termine), ad una di queste forme $Z^3-3\text{Æ}Z = \pm\mathcal{Z}$; $X^3+3\text{Æ}X = \pm\mathcal{X}$; tutta la difficoltà si riduce alla so-

luzione di questo Problema. Dato il rettangolo di due quantità con la Somma, ovvero la differenza dei loro cubi; trovare le medesime quantità, lo che fassi risolvendo un'Equazione Quadratica da una Radice solida. Imperciochè $\frac{\AE}{A} = E$; $\frac{\AE^3}{A^3} = E^3$.

$$A^3 + \frac{\AE^3}{A^3} = A^3 + E^3 = Z$$

Parimente trovasi $\frac{\AE^3}{E^3} + E^3 = Z$; e quindi moltiplicate tutte in A^3, o in E^3, e trasportati i termini diventa $A^6 - ZA^3 = -\AE^3 = E^6 - ZE^3$; le cui radici sono $\frac{1}{2}Z \pm \sqrt{\frac{1}{4}Z^2 - \AE^3} = A^3, E^3$. Similmente mostrerassi, che $A^6 - XA^3 = \AE^3 = E^6 + XE^3$, le cui radici sono $\sqrt{\frac{1}{4}X^2 + \AE^3} \pm \frac{1}{2}X = A^3, E^3$; e perciò

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}Z + \sqrt{\tfrac{1}{4}Z^2 - \AE^3}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}Z - \sqrt{\tfrac{1}{4}Z^2 - \AE^3}} = A + E = Z.$$

e così ancora

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}X + \sqrt{\tfrac{1}{4}X^2 + \AE^3}} - \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}X + \sqrt{\tfrac{1}{4}X^2 + \AE^3}} = A - E = X.$$

Il che era proposto.

Questa risoluzione della Equazione cubica gli suggerì un'altra necessaria,

investigazione per estrarre la radice da
un Binomio Cubo, poichè tutta l'operazione
era a questo termine ridotta. sia dunque
per esempio proposto il cubo Binomio
$20 \pm \sqrt{392}$, di cui vogliasi la radice cu=
bica. Estraggasi tutta la parte raziona=
le dal vincolo radicale (e ciò sempre si
faccia), e rappresentisi il cubo binomio
in quest'aspetto $20 \pm 14\sqrt{2}$. Egli è
manifesto, che una parte della radice
Binomia, se pur v'è, deve essere
o $\sqrt{2}$, oppure un moltiplo di ~~radice~~
$\sqrt{2}$. Poichè, se $\sqrt{2}$ non entra nella
radice, non entrerà neppure nel cubo.
la radice dunque generale avrà questa
forma $a \pm f\sqrt{e}$. Facciasi il cubo
di questa radice, e avrassi $a^3 \pm 3a^2f\sqrt{e}$
$+ 3af^2e \pm f^3e\sqrt{e}$; il quale confrontato
col binomio proposto dà queste due
equazioni $a^3 + 3af^2e = 20$; $+ 3a^2f\sqrt{e} + f^3e\sqrt{e} = 14\sqrt{2}$.
Posto dunque $\sqrt{e} = \sqrt{2}$ si ridurranno
esse a quest'altre $a^3 + 6af^2 = 20$;
$3a^2f + 2f^3 = 14$. Pongasi ora $f = 1$, e
avrassi $3a^2 + 2 = 14$, cioè $a^2 = 4$, onde $a = 2$

il qual valore sostituito nell'altra equazione $a^3+6af^2=20$, avrassi $8+12=20$, come si richiede. Se posto $f=1$, a^3+6af^2 fosse stato maggiore di 20, bisognava tornar da capo, e supporre f maggiore, per esempio $=2$; se a^3+6af^2 fosse divenuto minore di 20, era necessario supporre f minore. L'avvertenza generale è questa. Il numero f deve essere o intiero, o metà d'un intiero, e di più deve essere parte aliquota del numero, che si prefigge alla sorda radice che in tal caso è 14. Se il cubo proposto fosse un binomio composto di due quantità sorde; la forma della radice sarebbe $d\sqrt{a}\pm f\sqrt{e}$. Il d, e l'f sarebbe da determinarsi secondo le riflessioni suddette. Ognun vede, che questo metodo ha luogo nella estrazione della radice dal binomio quadrato, anzi nella estrazione della radice da tutti gli altri Binomii, o Biquadratici, o sursolidi in qualunque modo si siano purchè abbiasi riguardo alla vera composizione di ciascuna

potestà, e ciò si può fare cavando direttamente la radice dal Binomio proposto, come indispensabilmente dee farsi dove le dimensioni sono 5, 7, 11, eccetera, che sogliono dirsi sursolidi primo, secondo, eccetera, ovvero cavando una radice superiore, per indi cavarne un'altra inferiore che equivalga alla radice cercata, come in tutte le dimensioni pari 4, 6, 8 ~~~. Per esempio da un Binomio Biquadrato posso cavare la radice quadratica, e dalla radice quadratica cavarne un'altra quadratica, per avere la biquadratica cercata. Nel sesto grado posso cavar la cubica, e dalla cubica la quadratica per avere la quadratocubica. e così dell'altre. Avvertasi in ultimo luogo che nei binomj di dimensioni pari avolte la forma del binomio è diversa da quella della radice. Nel binomio quadrato per esempio $38 \pm 12\sqrt{10}$ parerebbe, che la forma della radice dovesse essere $a \pm f\sqrt{e}$, cioè un composto d'un membro razionale, e d'uno irrazionale, eppure ella non è così. Ambi i termini

della radice sono irrazionali, e la forma della radice è $d\sqrt{a} \pm f\sqrt{e}$; sicchè dunque non $\sqrt{a}$, o $\sqrt{e}$ è eguale a $\sqrt{10}$; ma bensì $\sqrt{ae}$; e perchè 10 formasi da 1×10, ovvero da 2×5; egli è evidente che non $a = 1$, ed $e = 10$, o vice versa, ma bensì $a = 2$, ed $e = 5$, o vice versa deve essere; perchè se il primo valesse non sarebbe ciascun termine della radice irrazionale, come vuole la natura dell' equazione poiche $\sqrt{a} = \sqrt{1}$ è lo stesso che $\sqrt{a} = 1$ termine razionale e perciò contrario all' ipotesi. Simili opportune riflessioni si facciano in tutti gli altri Binomi di potestà pari.

Trà i Problemi imperfettamente determinati avvi la regola della Alligazione, come dicono gli Aritmetici, che consiste nel mescolare insieme cose di diverso valore in maniera, che abbiasi un misto di valor medio assegnato ad arbitrio. La regola vuole, che si scrivano alternativamente gli eccessi dei valori

maggiori sopra il valor medio, e i difetti dei valori minori, cioè l'eccesso a lato a quello del minor valore, che è alligato al maggiore, e il difetto del minor valore a lato a quel del maggiore. Indi prendasi per primo termine della proporzione la somma di tutte le differenze, per secondo il numero esposto, ovvero la quantità del misto, per terzo la somma delle differenze laterali, e il quarto termine sarà il numero che deesi prendere da ciascun genere per avere il misto. Ma questa regola ha un difetto, ed è che non esibisce che una soluzione del quesito, e lascia tutte le altre possibili, onde il Bacheti nelle sue Annotazioni alla Questione 41 del libro 4 di Diofanto rimedia a questa imperfezione con un metodo dedotto dai principj dell'Algebra, per mezzo del quale assegna i giusti limiti a tutti i possibili, in cui sciogliesi il quesito. Sia per esempio proposto questo Problema. Debbanosi comprare venti uccelli con venti Baiocchi, e le specie di questi uccelli siano, Oche, che vagliono

quattro bajocchi l'uno, Coturnici, che vagliono un mezzo bajocco l'una Allodole, che vagliono un quarto di baiocco l'una. Cercasi quanti uccelli si debbano comprare da ciascuna specie. Ovvero espongasi il Problema, come lo espone il Bachet. Dividere il numero 20 in tre parti di maniera, che la prima moltiplicata in 4, la seconda in $\frac{1}{2}$, la terza in $\frac{1}{4}$ facciano 20. Colla regola della Alligazione hassi una sola soluzione, che per essere espressa con rotti non sarebbe il caso della compera degli uccelli. Sia dunque la prima parte n., dunque le due altre sono $20-n$, e perciò $n < 20$; e poichè la prima moltiplicata in 4 è $4n$, sarà $20-4n = \frac{1}{2}$ della secda $+\frac{1}{4}$ della terza, e quindi $4n < 20$, cioè $n < 5$.. Essendo $20-4n = \frac{1}{2}$ della secda $+\frac{1}{4}$ della terza, il suo quadruplo sarà $80-16n = 2$ volte la secda + una volta la terza; onde se sottraggasi $20-n$ = dlla somma della secda + la terza; il residuo

$60-15n$ sarà uguale a una volta la seconda; dunque $15n < 60$, cioè $n < 4$. Questo sottratto da $20-n$ lascia la terza $= 14n-40$; e perciò $40 < 14n$, cioè $n > 2\frac{6}{7}$. Ecco dunque prescritti i limiti, dentro i quali si può assumere n poichè deve essere $n < 4$, e $n > 2\frac{6}{7}$. Essendovi tra questi limiti un numero intiero, che è 3, se prendesi la prima parte del numero proposto $= 3$, avrannosi tutte le parti espresse da numeri intieri, e quindi una congrua soluzione al quesito. Crescendo il numero dei termini, l'operazione riesce più perplessa, ma però appoggiata ai medesimi principi. Propongasi per esempio di dividere il numero 100 in quattro parti a, b, c, d di modo, che sia $3a + b + \frac{1}{2}c + \frac{1}{7}d = 100$. Poichè $100 = a + b + c + d$, sarà $100 - a = b + c + d$. e perciò $a < 100$; ma $3a + b + \frac{1}{2}c + \frac{1}{7}d = 100$, e $100 - 3a = b + \frac{1}{2}c + \frac{1}{7}d$, dunque deve essere $3a < 100$, cioè $a < 33\frac{1}{3}$. Ora prendasi come cognito $100-a$, dunque $100 - a - b = c + d$, cioè $a < 100 - b$, e

$b < 100 - a$ in guisa però, che sia $100 - 3a - b = \frac{1}{2}c + \frac{1}{7}d$, e quindi $b < 100 - 3a$, e $3a < 100 - b$, cioè $a < 33\frac{1}{3} - \frac{1}{3}b$. Moltiplicati tutti i termini in 7 averassi $700 - 21a - 7b = \frac{7}{2}c + d$, e quindi sottratta l'equazione $100 - a - b = c + d$ resterà $600 - 20a - 6b = \frac{5}{2}c$, e perciò $6b < 600 - 20a$, e $b < 100 - 3\frac{1}{3}a$; parimente $20a < 600 - 6b$ ed $a < 30 - \frac{3}{10}b$, e divisi tutti per $\frac{5}{2}$ sarà $240 - 8a - \frac{12}{5}b = c$, e perciò $8a < 240 - \frac{12}{5}b$, e $a < 30 - \frac{3}{10}b$, come prima. Sottratto dunque questo valore c da $100 - a - b = c + d$, resterà $7a + \frac{7}{5}b - 140 = d$ e quindi $7a + \frac{7}{5}b > 140$, ed $a + \frac{1}{5}b > 20$. Sia dunque $30 - e = a$ preso e qualunque numero, che sia minore di 30. In vece di b è lecito assumere qualunque numero minore di $100 - 3\frac{1}{3}a$, cioè sostituendo minore di $3\frac{1}{3}e$. Sia $b = 3\frac{1}{3}e - f$ preso f qualunque numero minore di $3\frac{1}{3}e$. In vece di c devesi assumere $240 - 8a - 2\frac{2}{5}b$, cioè sostituiti ad a e b i suoi valori $2\frac{2}{5}f$. In vece di $d = 7a + 1\frac{2}{5}b - 140$ l'equivalente $70 - 2\frac{1}{3}e - 1\frac{2}{5}f$, ed ecco che averassi una piena soluzione, e giusta determinazione del Problema.

Il chiarissimo Signor Cavaliere Isacco Newton insegna il modo di esibire per approssimazione un valore dato per serie infinita. Per esempio data la corda di un qualunque arco, la quale chiamisi A, e B la corda della metà della metà dell'arco, trovare a un di presso la lunghezza dell'arco. Pongasi l'arco $= z$, e il raggio del cerchio $= r$; sarà la corda $A = z - \frac{z^3}{4 \times 6rr} + \frac{z^5}{4 \times 4 \times 120r^4}$ — ecc.

e $B = \frac{z}{2} - \frac{z^3}{2 \times 16 \times 6rr} + \frac{z^5}{2 \times 16 \times 16 \times 120r^4}$ — ecc.

Moltiplichisi ora B in n numero fittizio, e levisi A dal prodotto, e pongasi il secondo termine $-\frac{nz^3}{2 \times 16 \times 6rr} + \frac{z^3}{4 \times 6rr} = 0$, onde abbiasi il valore di $n = 8$, e $8B - A = 3z - \frac{3z^5}{64 \times 120r^4}$. Cioè $\frac{8B - A}{3} = z$ prossimamente; giacchè l'errore nell'eccesso non è maggiore di $\frac{z^5}{7680r^4}$ quantità trascurabile quando l'arco non sia grandissimo, e quando si contentiamo di una approssimazione. Che se vogliasi maggiore l'approssimazione, si procuri di fare svanire il terzo termine, o il quarto ecc. in vece del secondo, ed avrassi maggiore accuratezza. Codesto metodo vaglia per tutti i valori espressi da una serie infinita in qualunque equazione.

Per quadrare una qualche curva il Newton dà due serie regolari, l'una delle quali serve, quando l'ordinata è eguale à un binomio elevato a qualunque potestà l'altra più generale, quando trattasi d'un trinomio, d'un quadrinomio, o di un infinitinomio. Quanto alla prima sia l'equazione alla curva $y = az^{\theta} \times \overline{e+fz^{\eta}}^{\lambda}$, in cui le lettere a, e, f sono quantità date, e θ, η, λ gl'indici ovvero gli esponenti delle dignità a cui sono elevate le quantità rispettive. Facciasi $\frac{\theta+1}{\eta} = r$; $\lambda + r = s$; $\frac{a}{\eta f} \times \overline{e+fz^{\eta}}^{\lambda+1} = Q$; $r\eta - \eta = \pi$. Sarà l'area della curva espressa da questa serie

$$Q\left(\frac{z^{\pi}}{s} - \frac{(r-1)eA}{(s-1)fz^{\eta}} + \frac{(r-2)eB}{(s-2)fz^{\eta}} - \frac{(r-3)eC}{(s-3)fz^{\eta}} + \text{ecc.}\right)$$

dove Q si moltiplica in tutta la serie susseguente, e A, B, C, D ecc. dinotano i termini prossimamente antecedenti della serie. Quanto poi alla serie più generale sia $y = z^{\theta-1} \times QR^{\lambda-1}$, in cui sia Q eguale a questa serie $a + bz^{\eta} + cz^{2\eta} + dz^{3\eta} + \text{ecc.}$, ed $R = e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + hz^{3\eta} + \text{ecc.}$ Pongasi $\frac{\theta}{\eta} = r$; $r + \lambda = s$, $s + \lambda = t$, $t + \lambda = v$ ecc. sarà l'area della curva $= z^{\theta}R^{\lambda}\left(\frac{\frac{1}{\eta}a}{re} + \frac{\frac{1}{\eta}b - sfA}{(r+1)e}z^{\eta} + \right.$

$$+ \frac{\frac{1}{\eta}c - (s+1)fB - tgA}{(r+2)e}z^{2\eta} + \frac{\frac{1}{\eta}d - (s+2)fC - (t+1)gB - vhA}{(r+3)e}z^{3\eta} + \text{ecc.}$$

Per quadrare una qualche curva il Newton dà due serie regolari, l'una delle quali serve, quando l'ordinata è eguale à un binomio elevato a qualunque potestà; l'altra più generale, quando trattasi d'un trinomio, d'un quadrinomio, o di un infinitinomio. Quanto alla prima sia l'equazione alla curva $y = az^{\theta} \times \overline{e+fz^{\eta}}^{\lambda}$, in cui le lettere a, e, f sono quantità date, e θ, η, λ gl'indici ovvero gli esponenti delle dignità a cui sono elevate le quantità rispettive. Facciasi $\frac{\theta+1}{\eta} = r$; $\lambda+r=s$; $\frac{a}{\eta f} \times \overline{e+fz^{\eta}}^{\lambda+1} = Q$; $r\eta-\eta=\pi$. Sarà l'area della curva espressa da questa serie

$$Q\left(\frac{z^{\pi}}{s} - \frac{(r-1)\,eA}{(s-1)fz^{\eta}} + \frac{(r-2)\,eB}{(s-2)\,fz^{\eta}} - \frac{(r-3)\,eC}{(s-3)fz^{\eta}} + \ldots\right)$$

dove Q si moltiplica in tutta la serie susseguente, e $A, B, C, D \ldots$ dinotano i termini prossimamente antecedenti della serie. Quanto poi alla serie più generale sia $y = z^{\theta-1} \times QR^{\lambda-1}$, in cui sia Q eguale a questa serie $a+bz^{\eta}+cz^{2\eta}+dz^{3\eta}+\ldots$, ed $R = e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+hz^{3\eta}+\ldots$.

Pongasi $\frac{\theta}{\eta}=r$; $r+\lambda=s$, $s+\lambda=t$, $t+\lambda=v \ldots$ sarà l'area della curva

$$= z^{\theta}R^{\lambda}\left(\frac{\frac{1}{\eta}a}{re} + \frac{\frac{1}{\eta}b-sfA}{(r+1)\,e}z^{\eta} + \right.$$

$$+ \frac{\frac{1}{\eta}c-(s+1)fB-tgA}{(r+2)\,e}z^{2\eta} + \frac{\frac{1}{\eta}D-(s+2)fC-(t-1)gB-vhA}{(r+3)\,e}z^{3\eta} + \ldots$$

Dove $A, B, C, \ldots$ sono i coefficienti dati coi suoi segni dei termini prossimamente antecedenti, cioè A il coefficiente del primo termine $\frac{\frac{1}{2}a}{re}$, B il coefficiente del secondo $\frac{\frac{1}{2}b - sfA}{(V+1)e}$, e così in seguito.

La somma della serie $nx^m + 2nx^{2m} + 3nx^{3m} + \ldots$ fino all'infinito, la quale è composta di due altre serie, una delle quali è aritmetica $n + 2n + 3n + \ldots$, l'altra geometrica, come $x^m + x^{2m} + x^{3m} \ldots$ sarà, dissi, la serie composta $nx^m + 2nx^{2m} \ldots = \frac{nx^m}{(1-x^m)^2}$. Egualmente la somma della serie $a + (a+b)x + (a+2b)x^2 + (a+3b)x^3 + \ldots$ composta della serie aritmetica $a + a+b + a+2b + a+3b \ldots$ e della geometrica $x^0 + x^1 + x^2 + x^3 \ldots$, sarà $= \frac{a - (a-b)x}{(1-x)^2}$.; e se la serie sarà composta di due aritmetiche, ed'una geometrica, come questa $acx + \overline{a+b}\cdot\overline{c+d}\cdot x^2 + \overline{a+2b}\cdot\overline{c+2d}\, x^3 + \ldots$, la somma di

questa serie composta sarà la seguente

$$\frac{cax - 2acx^2 + bcx^2 + bdx^2 + adx^2 - bcx^3 + bdx^3 + acx^3 - adx^3}{(1-x)^3}$$

Siano date due equazioni della medesima incognita eguali a zero. Sostituendo il valore dell'incognita trovato per mezzo di una equazione nell'altra, formerassi un'equazione tra le costanti, che sarà eguale all'ultimo residuo senza l'incognita, che averebbesi cercando il massimo comun divisore delle due equazioni date.

Il Sig.r Giacomo Gregory nella sua Quadratura del circolo e dell'Iperbola cerca la terminazione di alcune serie convergenti, che hanno l'ultimo termine eguale tra loro, e con un metodo elegante trova questa terminazione. Delle serie, che il Gregory considera noi avremo il termine generale, perchè le sue affezioni ci avvisino, se la dette serie sono soggette alla somma algebraica o esponenziale, ovveramente se rifiutino tal genere di sommazione. Siano, dice egli, due quantità indefinite, a minore, e b maggiore, e siano date due ragioni di maggiore inequalità $c:d$; e $c:e$; indi sia come $c:d$, così $b-a$: al quarto termine $= \frac{bd-ad}{c}$, a cui si aggiunga la quantità a, onde diventi il secondo termine nella serie di $a = \frac{ca+bd-ad}{c}$: si faccia inoltre come $c:e :: b-a : \frac{be-ae}{c}$, la quale quantità si sottragga da b, e si ponga il residuo $\frac{bc-be+ae}{c}$ nella colonna di b in questa maniera. a $\quad$ b

$$\frac{ca+bd-ad}{c} \qquad \frac{bc-be+ae}{c}$$

Si continuino le serie convergenti così che i terzi termini siano composti dei secondi in quella guisa, che i secondi son composti dei primi; indi i quarti dei terzi, come questi dei secondi, e così via via in progresso, si troverà il termine generale nella serie, o colonna di $a = a + \frac{d.\overline{b-a}}{e+d} - \frac{d.\overline{b-a}}{e+d}\left(\frac{c-e-d}{c}\right)^{n-1}$, esprimendo n il numero de' termini, e il termine generale nella colonna di $b = b - \frac{e.\overline{b-a}}{e+d} + \frac{e.\overline{b-a}}{e+d}\left(\frac{c-e-d}{c}\right)^{n-1}$.

Da questi termini generali si fa manifesto, primo, che posto n infinito per essere nella quantità elevata alla podestà $n-1$ il denominatore c maggiore del numeratore $c-e-d$, diventa eguale a zero ~~nell~~ in ambi i termini generali l'ultima equazione, e resta solo nel primo per terminazione di serie $a + \frac{d.\overline{b-a}}{e+d}$, nel secondo per terminazione di serie $b - \frac{e.\overline{b-a}}{e+d}$, le quali quantità essendo ciascuna eguale ad $\frac{ae+bd}{e+d}$, sono eguali fra loro, e mostrano quale sia la cercata terminazione: secondo resta chiaro, che la somma delle predette serie è algebraico-esponenziale, cioè composta d'una somma algebraica, e d'una somma esponenziale, la qual somma si ha facilmente dal metodo per la somma delle serie del chiarissimo P. Riccati.

Dalle serie formate di termini algebraici, passa il suddetto Autore a esaminare le serie formate di termini esponenziali, che hanno negli esponenti una certa determinata serie algebraica, e trova

anche di questa la terminazione. Noi troveremo la medesima terminazione dall' Autore dal termine generale che danno alla serie dal medesimo considerata. Sia, dic'egli la serie convergente

i cui primi termini	A	B
i secondi	C	D
i terzi	E	F
&c	&c	&c

, e siano i 2[i] talmente fatti dai primi, che la ragione di B maggiore ad a minore sia moltiplicata della ragione C: a in ragion data di maggiore inequalità $m:n$, e che la ragione di b: a sia sia moltiplicata della ragione di D: A in ragion data di maggiore inequalità $m:o$: e siano i terzi termini similmente fatti dai secondi come i secondi lo sono dai primi, e si continui sino all'infinito la serie; sarà il termine generale nella colonna di a $= b^{\frac{n}{m+n-o} - \frac{n}{m+n-o}\left(-\frac{n-o}{m}\right)^{q-1}} \times a^{\frac{m-o}{m+n-o} + \frac{n}{m+n-o}\left(-\frac{n-o}{m}\right)^{q-1}}$

e il termine gen.e nella colonna di b =

$$= b^{\frac{n}{m+n-o} + \frac{m-o}{m+n-o}\left(-\frac{n-o}{m}\right)^{q-1}} \times a^{\frac{m-o}{m+n-o} - \frac{m-o}{m+n-o}\left(-\frac{n-o}{m}\right)^{q-1}},$$

intendendo per q il numero de' termini. Da questi termini generali risulta, primo, che per essere $m > n-o$, fatto q infinito, diventa zero in ambi i termini l'ultima frazione dell'esponente di b, e di a, e resta in ambidue la quantità $b^{\frac{n}{m+n-o}} \times a^{\frac{m-o}{m+n-o}}$, che è la terminazione della serie; secondo, che per essere le serie esponenzio-esponenziali non sono soggette a sommazioni algebraiche o esponenziali di alcuna sorte almeno coi noti metodi; e questo basti per illustrazione del metodo Gregoriano.

[Sia]no le serie a e b talmente fatte, che

$$\begin{array}{cc} a & b \\ \frac{a+b}{2} & \frac{a+3b}{4} \\ \frac{3a+5b}{8} & \frac{5a+11b}{16} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

il secondo termine nella prima colonna sia mezzo aritmetico tra il primo a della prima colonna, e il primo b della seconda; il secondo termine della seconda mezzo aritmetico tra il secondo della prima, e il primo della seconda; il terzo termine della prima mezzo aritmetico tra il secondo della prima, e il secondo della seconda; e così colla stessa regola per gli altri termini fino all'infinito; hanno per termini generali le quantità seguenti.

Termine generale della prima colonna $\dfrac{a(2+2^{2n-2})+b(2^{2n-1}-2)}{3\times 2^{2n-2}}$

Termine generale della seconda colonna $\dfrac{a(2^{2n-2}-1)+b(2^{2n-1}+1)}{3\times 2^{2n-2}}$

Se n, che indica il numero de' termini si fa $=\infty$, allora i termini generali si fanno eguali a questo valore $\frac{a+2b}{3}$, che è il secondo dei due mezzi aritmetici tra a, b.

Siano le serie a b talmente fatte, che

$$\begin{array}{cc} a & b \\ \frac{2ab}{a+b} & \frac{4ab}{3a+b} \\ \frac{8ab}{5a+3b} & \frac{16ab}{11a+5b} \\ \&c & \&c \end{array}$$

il secondo termine della prima colonna sia mezzo armonico tra a, b; il secondo della seconda colonna mezzo armonico tra $\frac{2ab}{a+b}$, e b, e così via via colla stessa regola.

Sono i loro termini generali $\dfrac{3\times 2^{2n-2}ab}{a(2^{2n-1}-2)+b(2+2^{2n-2})}$; $\dfrac{3\times 2^{2n-2}ab}{a(2^{2n-1}+1)+b(2\ldots}$

e fatto n infinito i termini generali si fanno eguali alla quantità che è il secondo dei due mezzi armonici tra a, b.

In alcuna equazione pare a volte che si debba aggiungere una quantità logaritmica ad una quantità data, quando realmente si deve detrarre. Sia per esempio l'equazione $x = z + l\,\overline{a+b-z}$, e il logaritmo debbasi prendere in una logistica, che abbia per sottangente qualunque quantità, e per protonumero sia quantità $a+b$. Poichè $a+b$ è maggiore di $a+b-z$ e il logaritmo di $a+b$ si è fatto $=0$, sarà il logaritmo di $a+b-z$ una quantità negativa, adunque alla quantità z deesi aggiungere una quantità negativa, cioè deesi detrarre da z il log.^{mo} di $a+b-z$ per avere la x cercata.

Sia il termine generale d'una serie $\frac{\overline{A+B}\cdot\overline{A+2B}\cdots\overline{A+Bn}}{\overline{a+b}\cdot\overline{a+2b}\cdots\overline{a+bn}}$, in cui n esprime il numero de' termini, la serie, che risulta da questo termine generale sarà la seguente $\frac{A+B}{a+b}$, $\frac{\overline{A+B}\cdot\overline{A+2B}}{\overline{a+b}\cdot\overline{a+2b}}$, $\frac{\overline{A+B}\cdot\overline{A+2B}\cdot\overline{A+3B}}{\overline{a+b}\cdot\overline{a+2b}\cdot\overline{a+3b}}$ ec. il primo termine corrisponde all'ipotesi di $n=1$; il secondo all'ipotesi di $n=2$ e così di mano in mano. Si voglia ora il termine, che precede $\frac{A+B}{a+b}$, o che corrisponde all'ipotesi di $n=0$. Quando $n=0$, $A+Bn$ si fa $=A$, e così $a+bn=a$. Si dia dunque questa forma al termine generale $\frac{A\cdot\overline{A+B}\cdot\overline{A+2B}\cdots\overline{A+Bn}}{a\cdot\overline{a+b}\cdot\overline{a+2b}\cdots\overline{a+bn}}\times\frac{a}{A}$, che equivale all'altro, perchè fatto successivamente $n=1$, $n=2$, ec. nascono gli istessi termini, che prima abbiamo trovati. Dunque fatto $n=0$, il termine corrispondente sarà $\frac{A}{a}\times\frac{a}{A}=1$. Si voglia ora il termine che precede 1, che è l'ipotesi di $n=-1$, nella quale $A+Bn$ diventa $=A-B$, ed $a+bn=a-b$. Diasi al termine generale quest'altra equivalente formola $\frac{\overline{A-B}\cdot A\cdot\overline{A+B}\cdot\overline{A+2B}\cdots\overline{A+Bn}}{\overline{a-b}\cdot a\cdot\overline{a+b}\cdot\overline{a+2b}\cdots\overline{a+bn}}\times\frac{a\cdot\overline{a-b}}{A\cdot\overline{A-B}}$, indi fatto in esso $n=-1$, nascerà $\frac{A-B}{a-b}\times\frac{a\cdot\overline{a-b}}{A\cdot\overline{A-B}}=\frac{a}{A}$ per termine corrispon-

dente all'ipotesi di $n=-1$. Si cogliesi di più il termine, che corrisponde all'ipotesi di $n=-2$; la nuova forma del termine generale sarà questa

$$\frac{\overline{A-2B}\cdot\overline{A-B}\cdot A\cdot\overline{A+B}\cdots\cdots\overline{A+Bn}}{\overline{a-2b}\cdot\overline{a-b}\cdot a\cdot\overline{a+b}\cdots\cdots\overline{a+bn}}\times\frac{a\cdot\overline{a-b}\cdot\overline{a-2b}}{A\cdot\overline{A-B}\cdot\overline{A-2B}}$$

, e il termine corrispondente all'ipotesi di $n=-2$ il seguente

$$\frac{\overline{A-2B}}{a-2b}\times\frac{a\cdot\overline{a-b}\cdot\overline{a-2b}}{A\cdot\overline{A-B}\cdot\overline{A-2B}}=\frac{a\cdot\overline{a-b}}{A\cdot\overline{A-B}}$$

. Coll'istesso metodo procedendo si troverà il termine corrispondente all'ipotesi di $n=-3$, $\frac{a\cdot\overline{a-b}\cdot\overline{a-2b}}{A\cdot\overline{A-B}\cdot\overline{A-2B}}$, onde il termine generale della nostra serie prodotta dalla parte negativa sarà

$$\frac{a\cdot\overline{a-b}\cdot\overline{a-2b}\cdots\cdots\overline{a+b(n+1)}}{A\cdot\overline{A-B}\cdot\overline{A-2B}\cdots\cdots\overline{A+B(n+1)}}$$

, intendendosi per n successivamente i numeri $-1, -2, -3, -4$ ec.^a Poichè dunque nell'ipotesi di $n=0$, qualunque siasi A, B, a, b è sempre il termine corrispondente $=1$, come abbiamo sopra veduto, sarà la serie $\frac{A+B}{a+b}$, $\frac{\overline{A+B}\times\overline{A+2B}}{\overline{a+b}\cdot\overline{a+2b}}$, $\frac{\overline{A+B}\cdot\overline{A+2B}\cdot\overline{A+3B}}{\overline{a+b}\cdot\overline{a+2b}\cdot\overline{a+3b}}$

prodotta dalla parte negativa

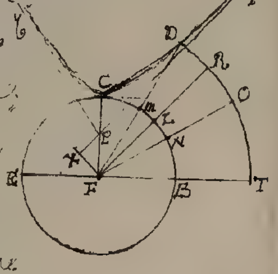
es.^a $\frac{a\cdot\overline{a-b}\cdot\overline{a-2b}}{A\cdot\overline{A-B}\cdot\overline{A-2B}}$, $\frac{a\cdot\overline{a-b}}{A\times\overline{A-B}}$, $\frac{a}{A}$, 1, $\frac{A+B}{a+b}$ ec.^a, e perciò la serie

$$\frac{a\cdot\overline{a-b}\cdot\overline{a-2b}\cdots\cdots\overline{a+b(n+1)}}{A\cdot\overline{A-B}\cdot\overline{A-2B}\cdots\overline{A+B(n+1)}},\ \cdots\cdots\cdots\ \frac{a\cdot\overline{a-b}}{A\times\overline{A-B}},\ \frac{a}{A},\ 1,\ \frac{A+B}{a+b},\ \frac{\overline{A+B}\cdot\overline{A+2B}}{\overline{a+b}\cdot\overline{a+2b}}\cdots\cdots\frac{\overline{A+B}\cdots\overline{A+nB}}{\overline{a+b}\cdots\overline{a+nb}},$$

avvertendo, che nei termini generali non è compreso il caso di $n=0$, a cui corrisponde il termine $=1$, e che, come si è detto, cominciando inclusivamente da $\frac{A+B}{a+b}$ per tutta la serie destra n indica successivamente i valori positivi della serie 1, 2, 3 ec.^a; ma cominciando inclusivamente da $\frac{a}{A}$ per tutta la serie sinistra n indica successivamente i valori negativi $-1, -2, -3$ ec.^a Il che si doveva dimostrare.

Quando una data equazione si scrive per una curva ritenta

al fuoco, la costruzione, e delineazione della curva non è sì facile, come la costruzione o delineazione di quelle curve, le di cui equazioni si riferiscono a un qualunque diametro; e se la curva ha assintoto, bisogna ben avvertire di non confondere l'assintoto con una linea, che è solamente all'assintoto parallela, il che molte volte richiede riflessione e giudizio, per non incorrere in paralogismi. Dato, per esempio il fuoco F, da cui si partano i raggi $FD=y$, sia l'equazione alla curva CD $\frac{m}{n}\cdot\frac{a^2dy}{y\sqrt{y^2-a^2}}=dz$, in cui dz è l'elemento



dell'arco CM nel cerchio CMN del raggio $FC=a$, e si voglia costruire la curva CD. Poichè $\int\frac{a^2dy}{y\sqrt{y^2-a^2}}$ è l'arco del raggio $=a$, secante $=y$, sarà il detto arco all'arco z, come $n:m$, che suppongo una ragione di maggior inegualità. Posto $dy=0$, il primo caso che risulta di $y=0$ è impossibile, l'altro di $y=a=FC$ dà il minimo dei raggi FD. Dunque, tirato qualunque raggio FC, la curva avrà il suo vertice nel punto C, ed FC sarà ad essa perpendicolare. Si conduca EFT indefinita normale a FC, a cui sia la tangente CO parallela. Assunto qualunque arco CN, prendasi CM in guisa, che sia $CN:CM::n:m$, sarà FO la secante dell'arco CN. Col centro in F, intervallo FO si descriva il cerchio TOD, che concorra con EF prodotta in T, e col raggio FM prodotto in D, il punto D sarà in curva, mentre in questo caso $FD=y$ corrisponde all'arco $CM=z$, ed è eguale a FO secante dell'arco $CN=\int\frac{a^2dy}{y\sqrt{y^2-a^2}}$. Similmente procedendo si troveranno quanti altri punti si vogliono della curva CD. Consideriamo ora il caso dell'assunto arco $CB=$ al quadrante. Fatto $CB:CL::n:m$, e condotta la indefinita FLR, poichè la secante del quadrante è infinita, infinito sarà pure il raggio che va alla curva FR, ma non per questo FR è l'assintoto della curva. Per determinare giustamente quest'assintoto, sia R il punto dove FR taglia l'arco DOT. Tutti gli archi OT, che corrispondono ai diversi punti D della curva, sono intercetti dalla tangente CO, e dalla ET, dunque, quando FO è infinita l'arco OT si fà eguale a FC. Così pure tutti gli archi OD sono intercetti dalla curva, e dal raggio FO, dunque, per il caso del quadrante, cangiandosi FO in FR, sarà RD l'arco intercetto dalla cur-

va, e dal raggio FR, cioè la distanza di FR dal vero

asintoto della curva, la quale ecco, come si determina.

Essendo CB : CZ :: CN : CM, sarà permutando e dividendo

CB : NB :: CZ : MZ, e permutando CB : CZ :: NB : MZ :: OT :

DR, cioè n : m :: OT . DR, e recedendo il punto O all'

infinito n : m :: FC : alla quarta proporzionale, a cui si

faccia eguale FIG normale a FZ, e si conduca XY pa-

ralela a FR, questa sarà l'asintoto della descritta

curva. Alla stessa maniera si troverà l'asintoto Py per

l'altro ramo Zy. Il che si dovea intendere.

La serie $1 + 1\cdot2 + 1\cdot2\cdot3 + 1\cdot2\cdot3\cdot4 \cdots\cdots 1\cdot2\cdot3\cdot4 \cdots\cdots n$ non ha

somma Algebraica, nè esponenziale, o in qualunque modo com-

posta di queste due. Se però piacesse di rappresentare la

somma generale con l'integrale d'una ~~generica~~ formola loga-

ritmica, essa è la seguente $-\int \frac{c\,dx\,(lx)^n}{x^2}$, preso questo inte-

grale per modo, che fatto $n = 1$, sia ~~[illegible]~~ il sud.°

integrale $= 2$. Dopo l'integrazione si levi l'unità, si faccia

$x = c$, che è il numero, ~~[illegible]~~ il cui logaritmo è l'unità; e la

logistica si prenda nella sottangente $= 1$; ed avrassi allora la

formola eguale alla somma della sud.a serie.

~~Trovare~~ l' Prop. P. 66 F. 27

trovare l'equazione all'Iperbola riferita agli assintoti quando le ~~ascisse~~ ordinate a un qualunque diametro sono parallele sono parallele al suo coniugato.

Prop. P. 67 ~~F~~ F. 28

trovare l'equazione dell'Iperbola riferita all'assintoto, allorche le ordinate si prendono parallele al qualunque primo diametro

Proposizione ~~P. 68 F~~ P. 68. F. 29

trovare l'equazione all'Iperbola allorche le ordinate a un assintoto sono parallele all'altro. Proposizione P. 69. F. 30

Quella ~~[illegible]~~ parte d'assintoto che viene ~~[illegible]~~ intercetta tra la tangente dell'Iperbola, e il centro, vien divisa per mezzo dall'ordinata parallela all'altro assintoto. Proposizione P. 69. F. 30

Condotte due tangenti MTm, HVh dico che i triangoli CMm, CHh sono simili

me 100 cc P. 69 F 30. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

me 60 c

du 8 88 88 1. 2. 3

Problema P. 16 F. 11. 12. 13. 14. 15

Se la linea Bf ~~tagliata Sezione~~ che passa per il fuoco taglia la ~~Sezione~~ Sezzione in X a trovare l'altro punto x, dove di nuovo taglia la Sezzione.

Problema P. 18. _ Tav. la stessa

Se BE che non passa per il fuoco, concorra colla ~~Sezion~~ Sezzione in E, a trovare l'altro punto e dove ella taglia nuovamente la Sezione.

Lemma P. 25. F. 16. 17

Se fuori della linea HR siano dati due punti F, C posti nella stessa linea CA perpendicolare ad HR, dai quali a un qualunque punto H della HR siano condotte CH, FH. Indi dal punto F si abbassi ad HC la perpendicolare FP la quale prodotta concorra in R con HA. e dal punto R si ~~conduca~~ conduca RC, e si produca Hf in Q : dico in primo luogo, che l'angolo fQC è retto, 2° che l'angolo FHP = fRQ

Scolio P. 28 F. 17. 16. 17

Determinare la grandezza di un diametro conjugato

Proposizione P. 55. F. 22. 23. 24

in ogni ~~Sezione~~ Sezzione, il cui centro C, e di cui il diametro qualunque è AB, al quale sia ordinata la BE, se si conduca una tangente al punto B ella taglierà il diametro in T in maniera che starà EC : EB :: EA : ET

Proposizione P. 58 F. 25

Sia qualunque Semi diametro CA, e due altri Semi diametri Conjugati CB, CK, e dai punti B, K siano ordinate al diametro CA, le rette BO, KQ, dico che il quadrato CA è uguale ai due quadrati CO, CQ. Corolario 3° siano CA, CB qualunque diametri sarà, CQ:CO OB:QK. Corolario 4to prodotta la tangente fino che concorra coi diametri in, m, n, dico che il diametro conjugato CK è mezzo proporzionale tra Bm, e Bn Corolario 5to siano CA, CB gli assi e dal centro C si conduca CP normale alla tangente, dico che il rettangolo PCK è uguale al rettangolo BCA.

forma acosmo   Proposizione P 62 F 26

Se costruita l'Iperbola tra gli assintoti CE, Ca, che abbia il centro in C, il diametro Vu la direttrice Hh, il vertice V si conduca per il vertice della sezione la linea CVK, che divida l'angolo egualmente, e tagli la direttrice ad angoli retti, indi per ~~...~~ lo stesso vertice V si tiri la retta ~~...~~ BVd parallela alla direttrice e tangente della Sezione nel punto V dico, che la retta Bd è uguale all asse secondo. ~~...~~ In oltre se si conduca alla Bd parallela ~~...~~ qualunque Efe, dico che il rettangolo Efe è uguale al quadrato BV, ovvero al rettangolo ~~...~~ BVd.

Proposizione. P. 63. F 26

Se all opposto ramo dell'Iperbola si conduca FQT parallela ad Va, e secante gli assintoti in Q, q, sarà il rettangolo qFQ uguale al quadrato del semi asse primo, ovvero al rettangolo VCo

Proposizione. P. 64. ~~...~~ F 27

Tra gli assintoti CH, Ch si intenda condotta qualunque Bd, che tocchi l'Iperbola nel punto T, a cui si à parallela qualunque Hfh dico che il rettangolo Hfh è uguale al rettangolo BTd

Proposizione. P. 65 F 28

Se da un qualunque punto F della curva all opposto ramo dell Iperbola si conduca Fh che tagli gli assintoti in H, h, a cui dal centro si tiri parallela il diametro CT dico che il rettangolo hfH è uguale al quadrato CT

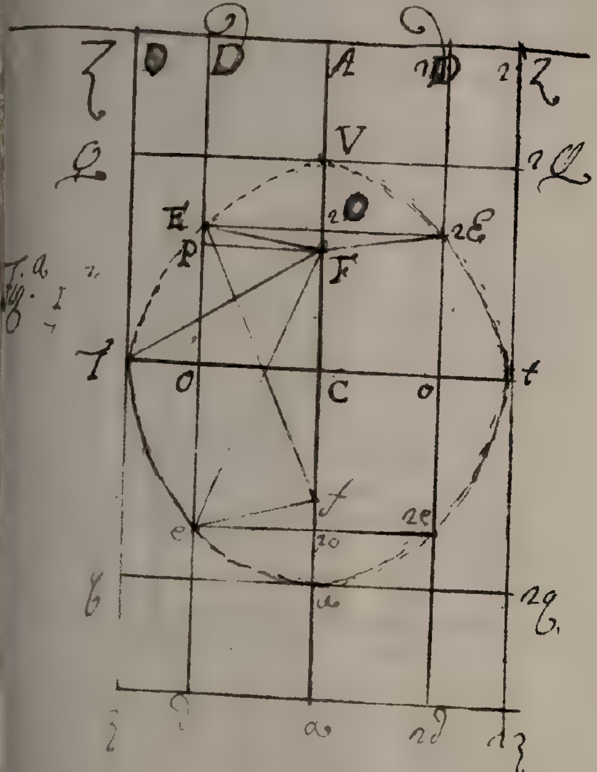


Fig.ª 1.

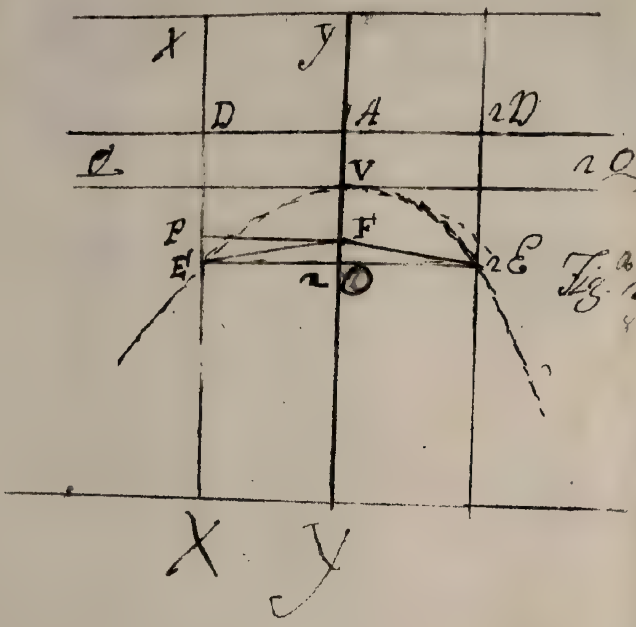


Fig.ª 2.ª

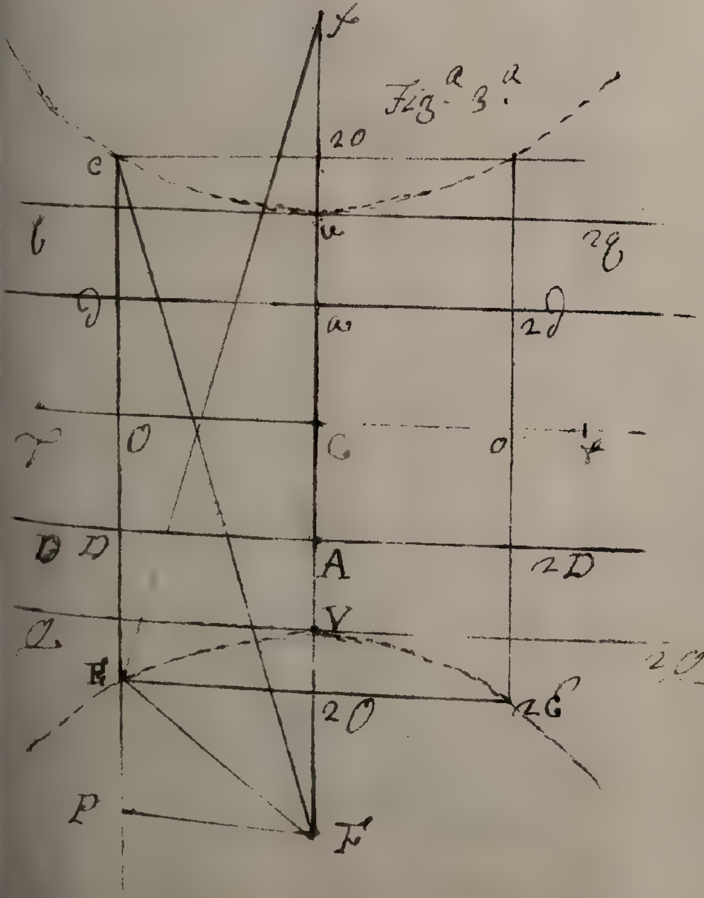


Fig.ª 3.ª

Fig.ª 4

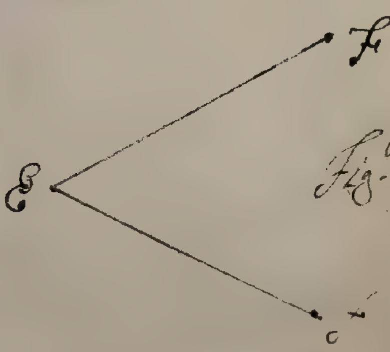


Fig.ª 5

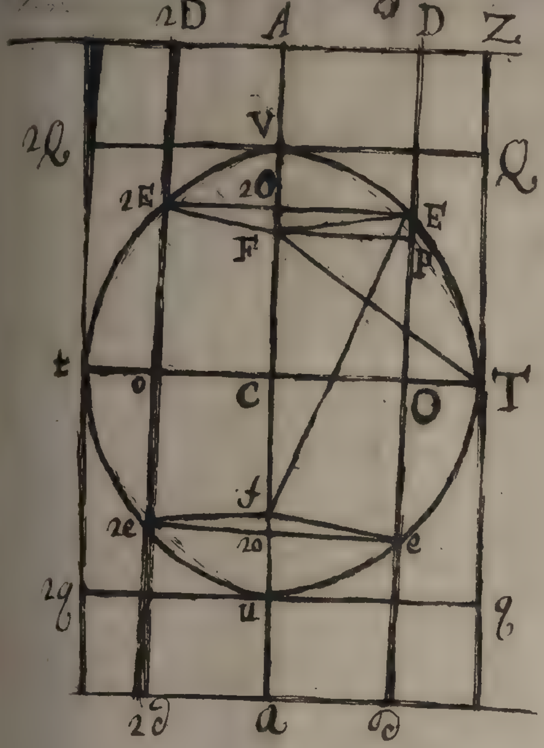


Fig. 7

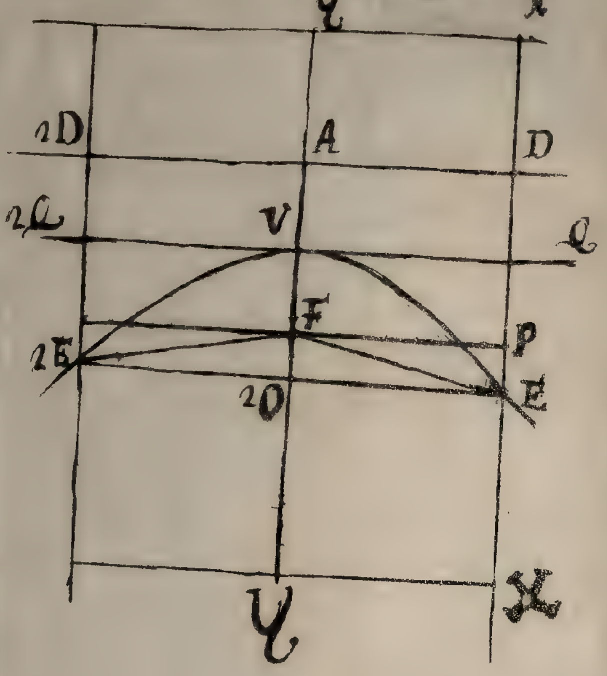


Fig. 8

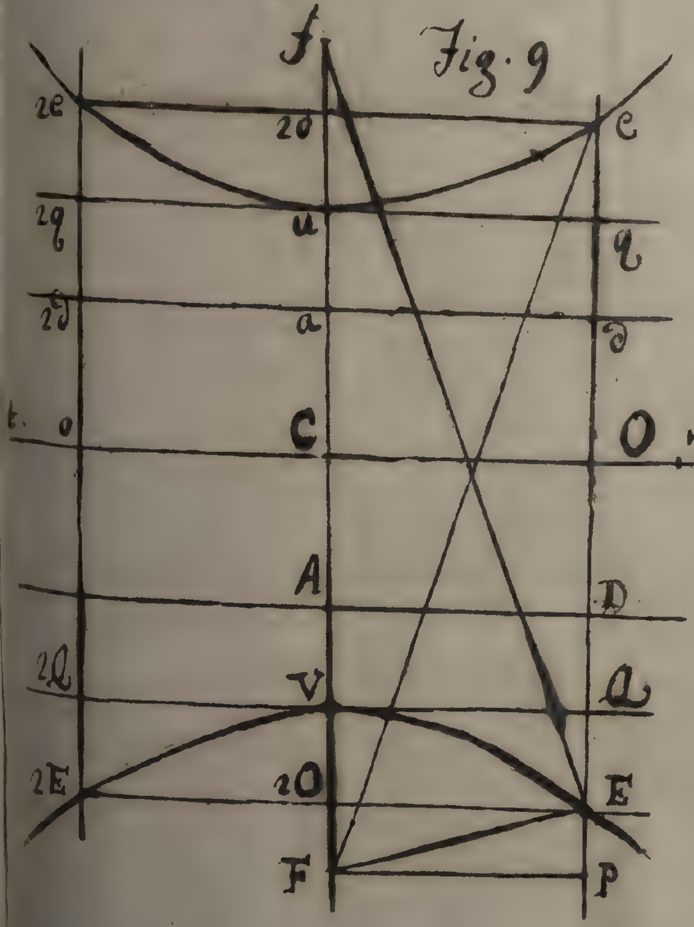


Fig. 9

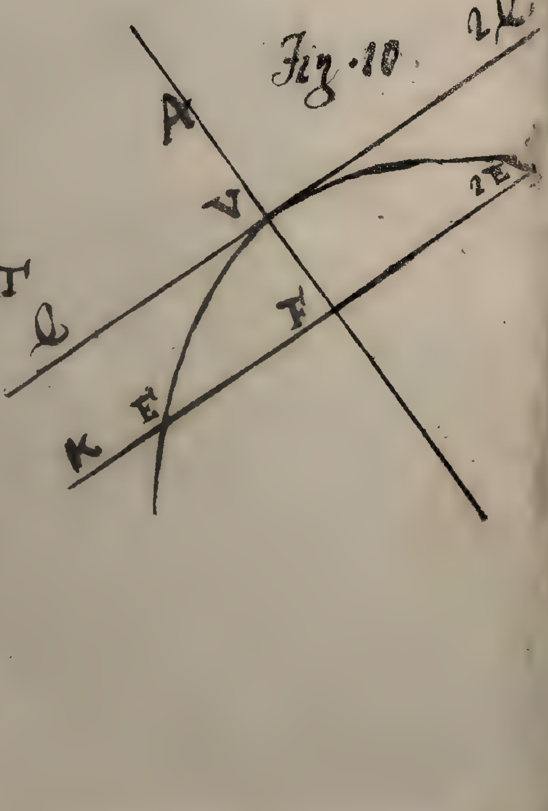
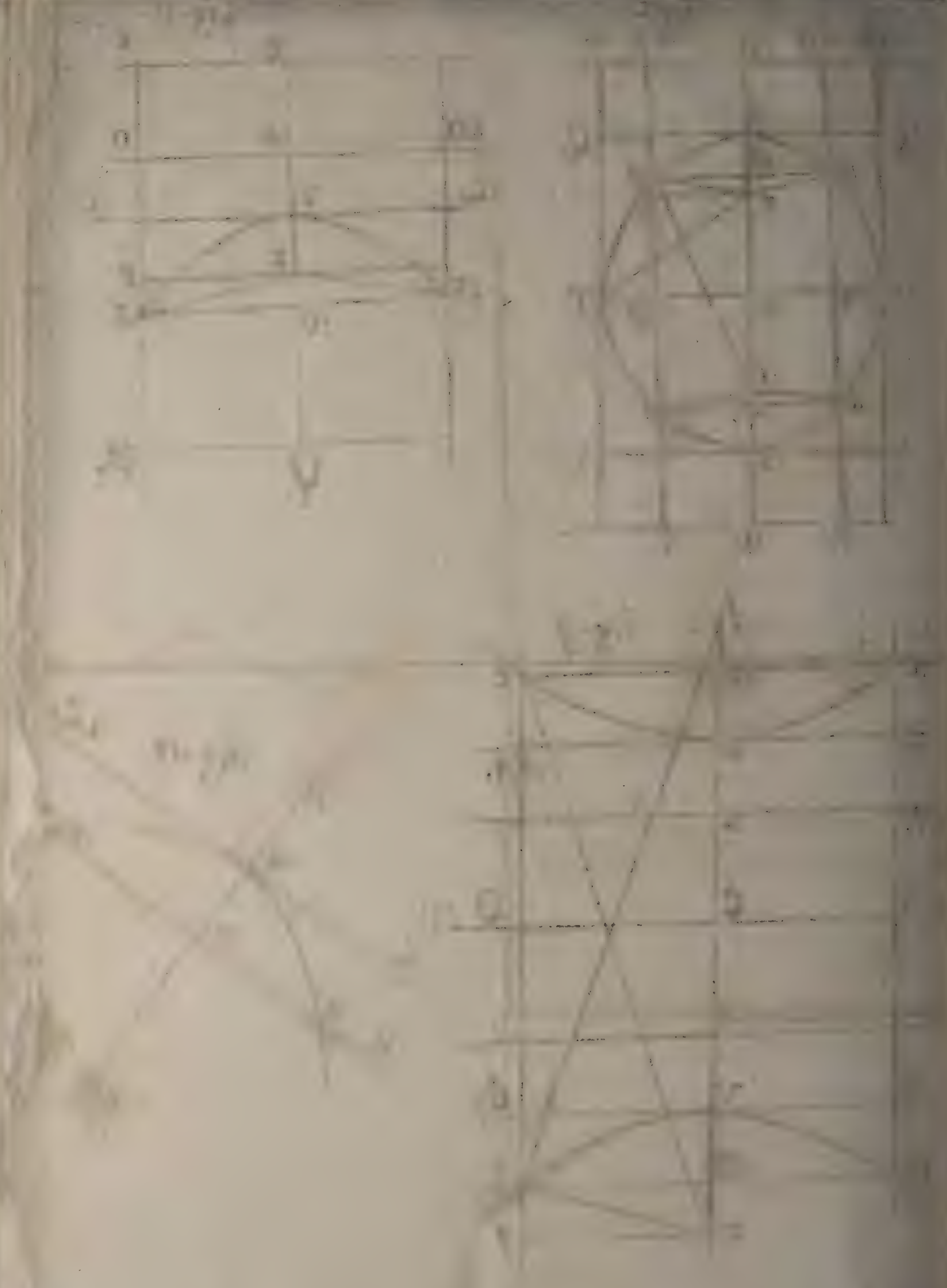


Fig. 10



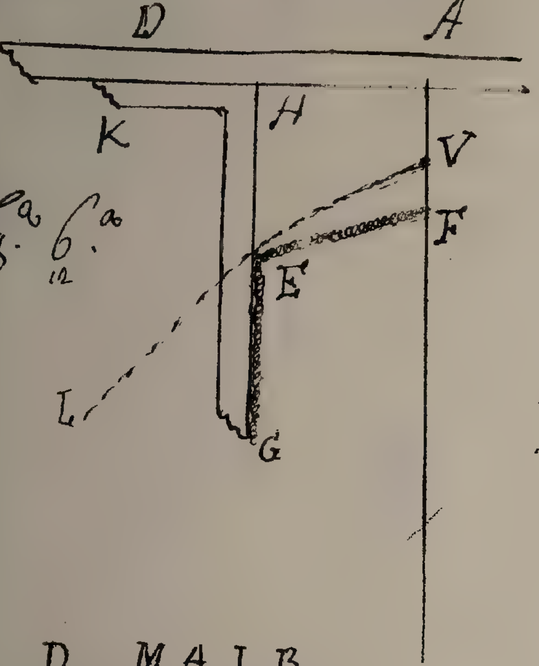


Fig.ª 6.ª
12

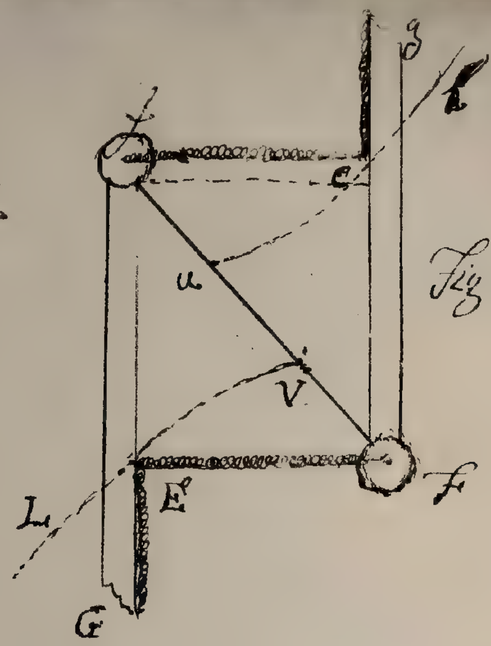


Fig.ª 7.ª
13

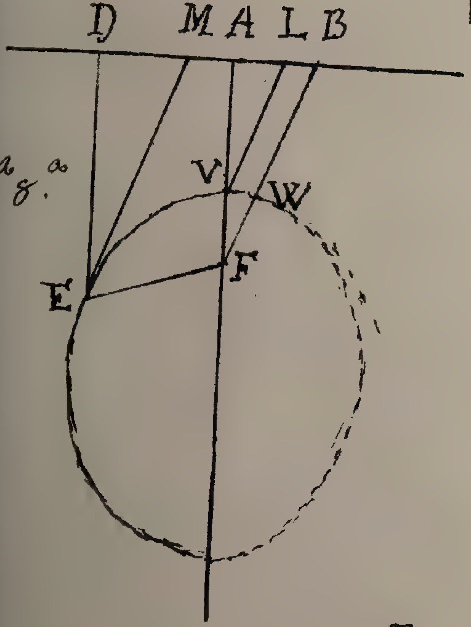


Fig.ª 8.ª

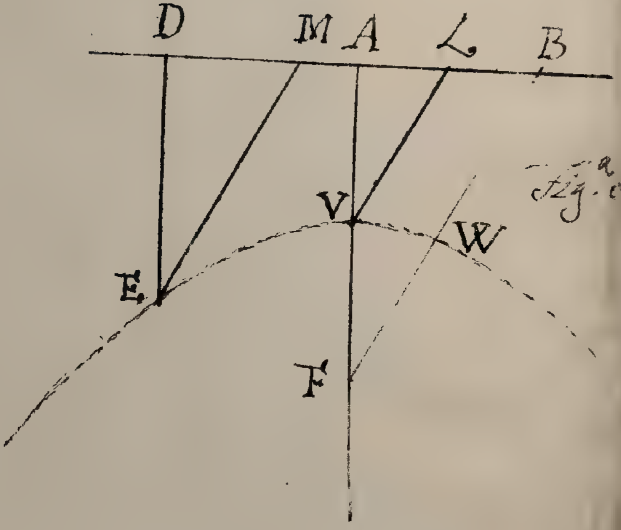


Fig.ª 9

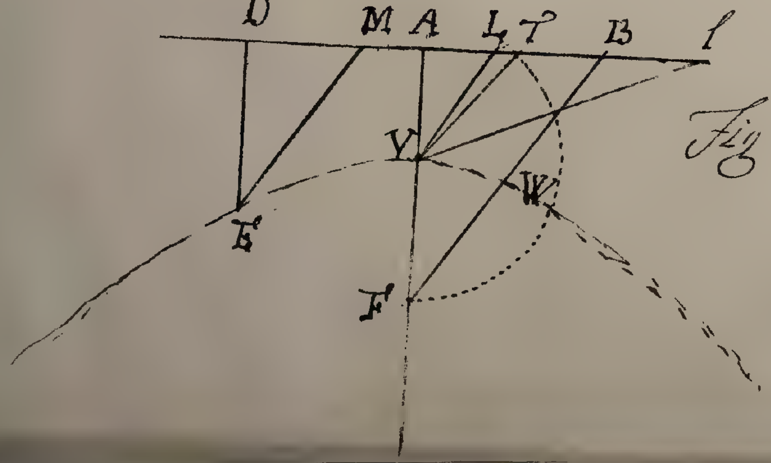


Fig.ª 10.ª

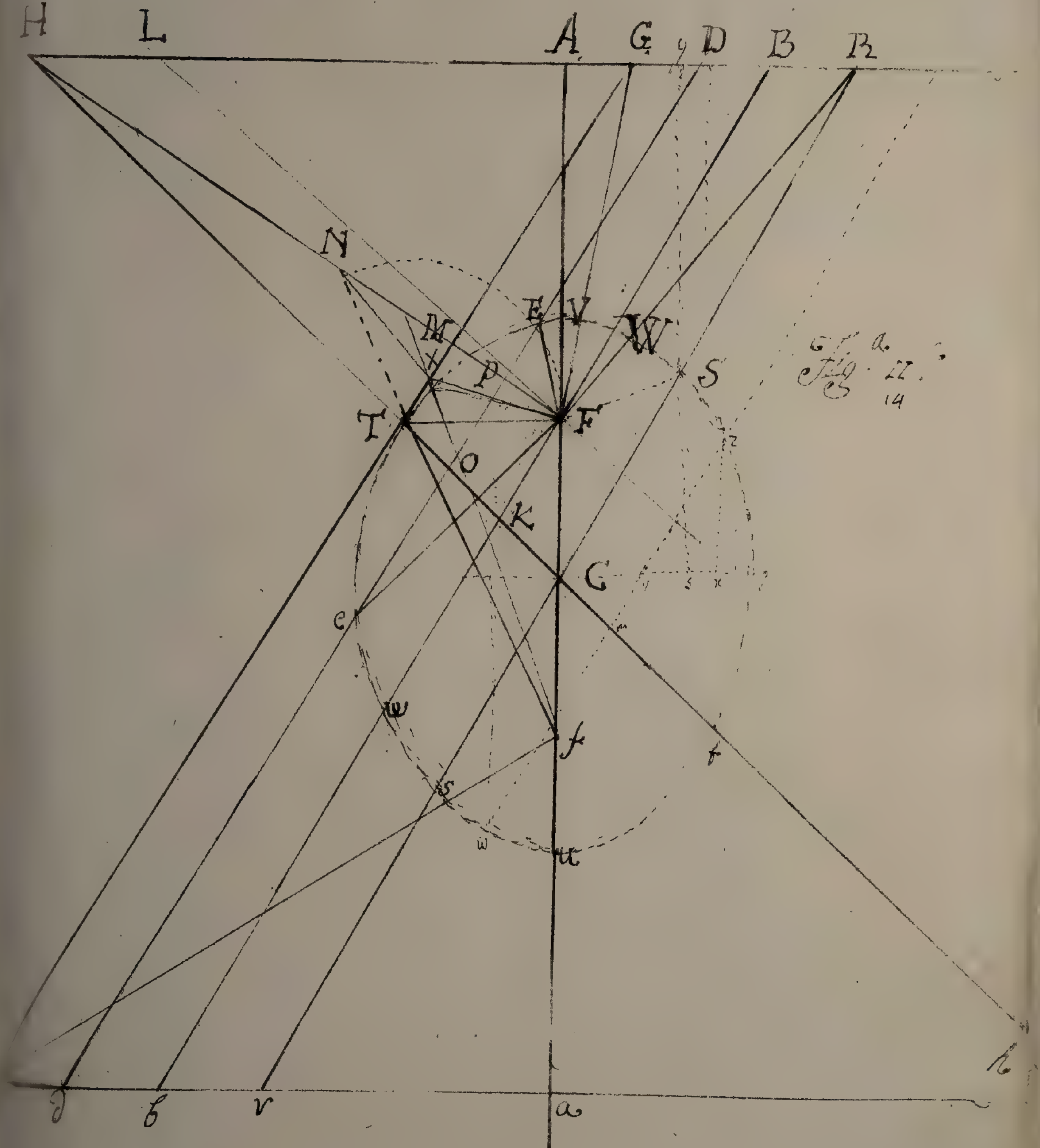


Fig. 22.
14

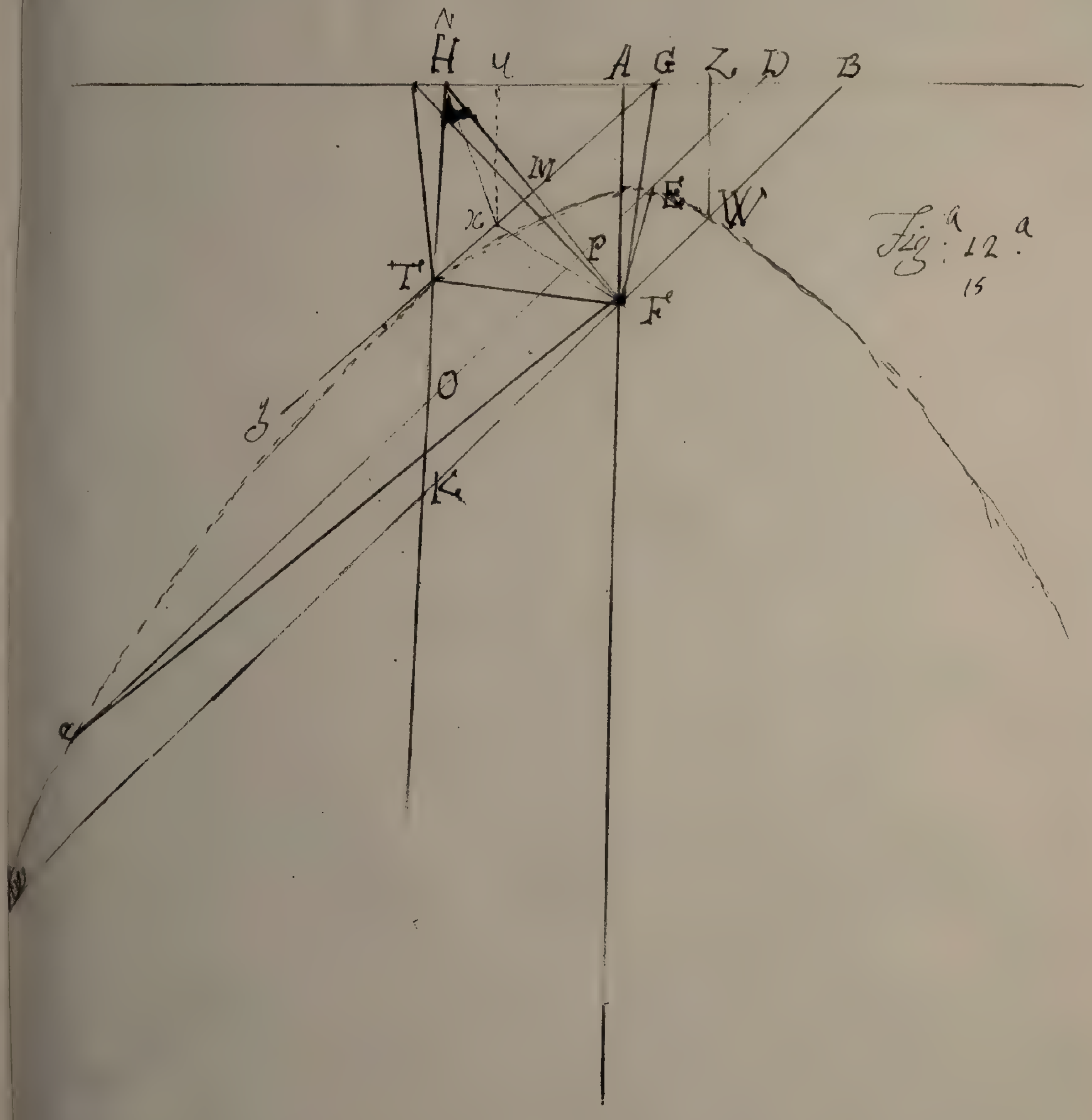


Fig:[a] 12[a]
15

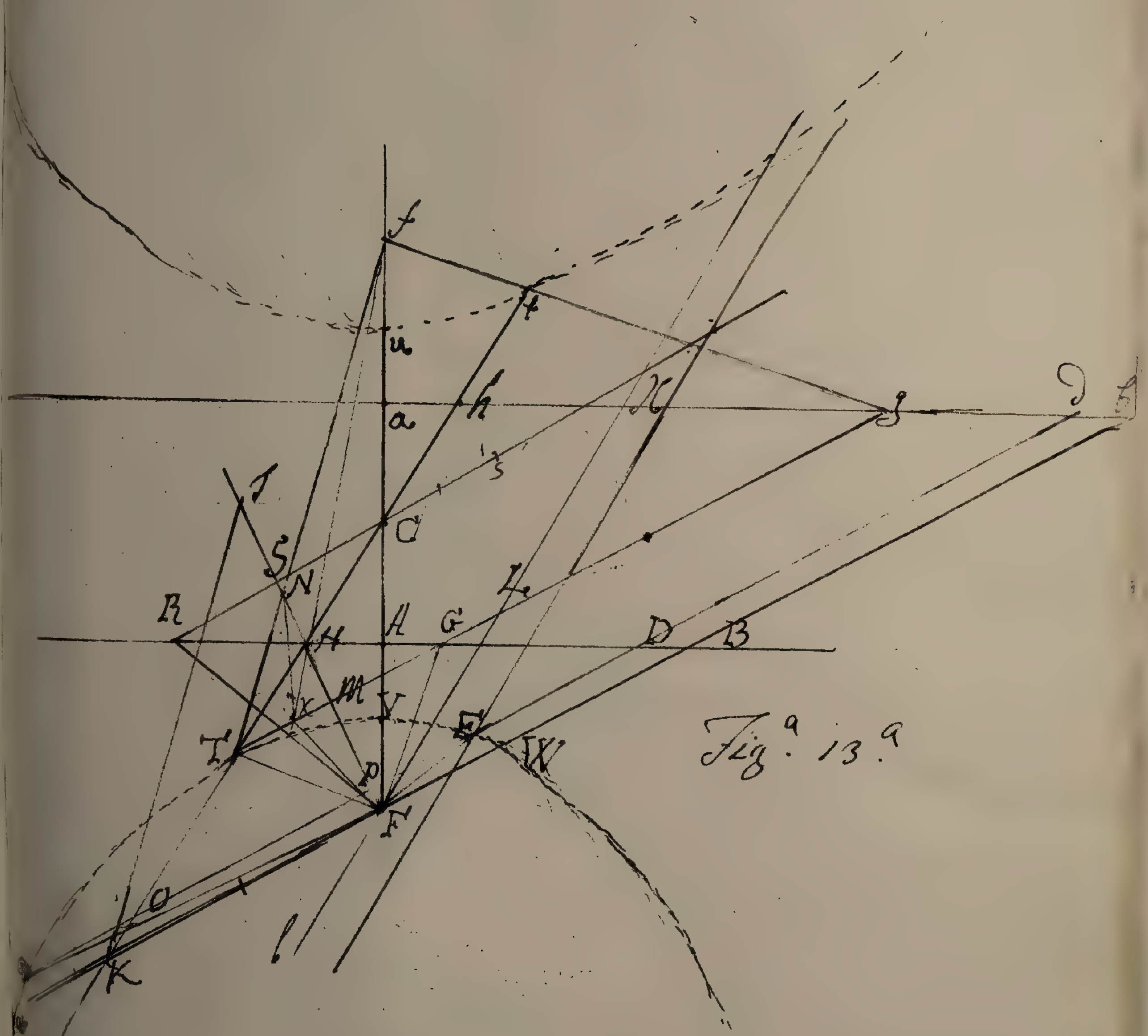
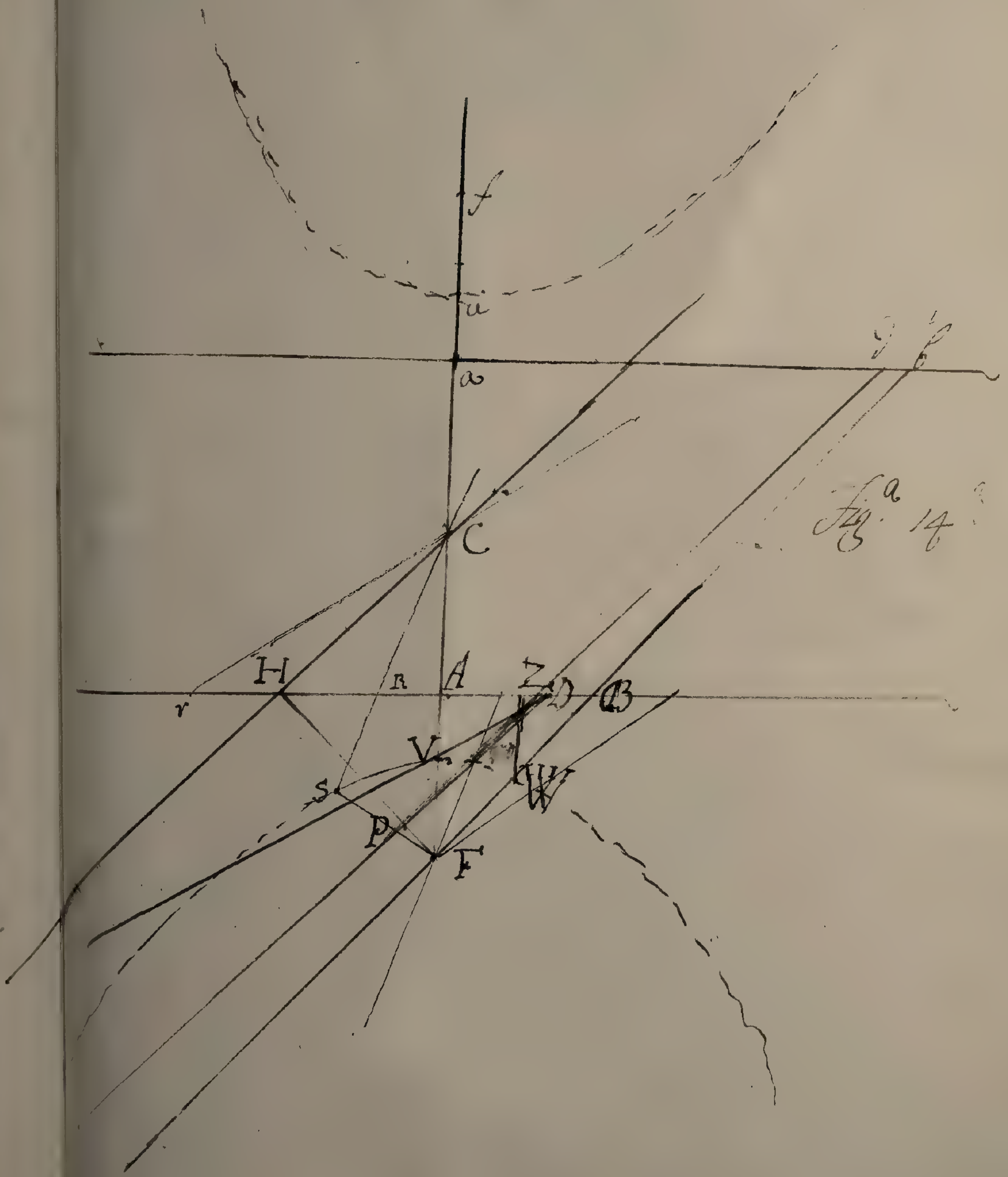


Fig.ª 13.ª


f
a
g
b
C
Fig.a 14
H
r
R
A
Z
D
B
V
S
W
P
F

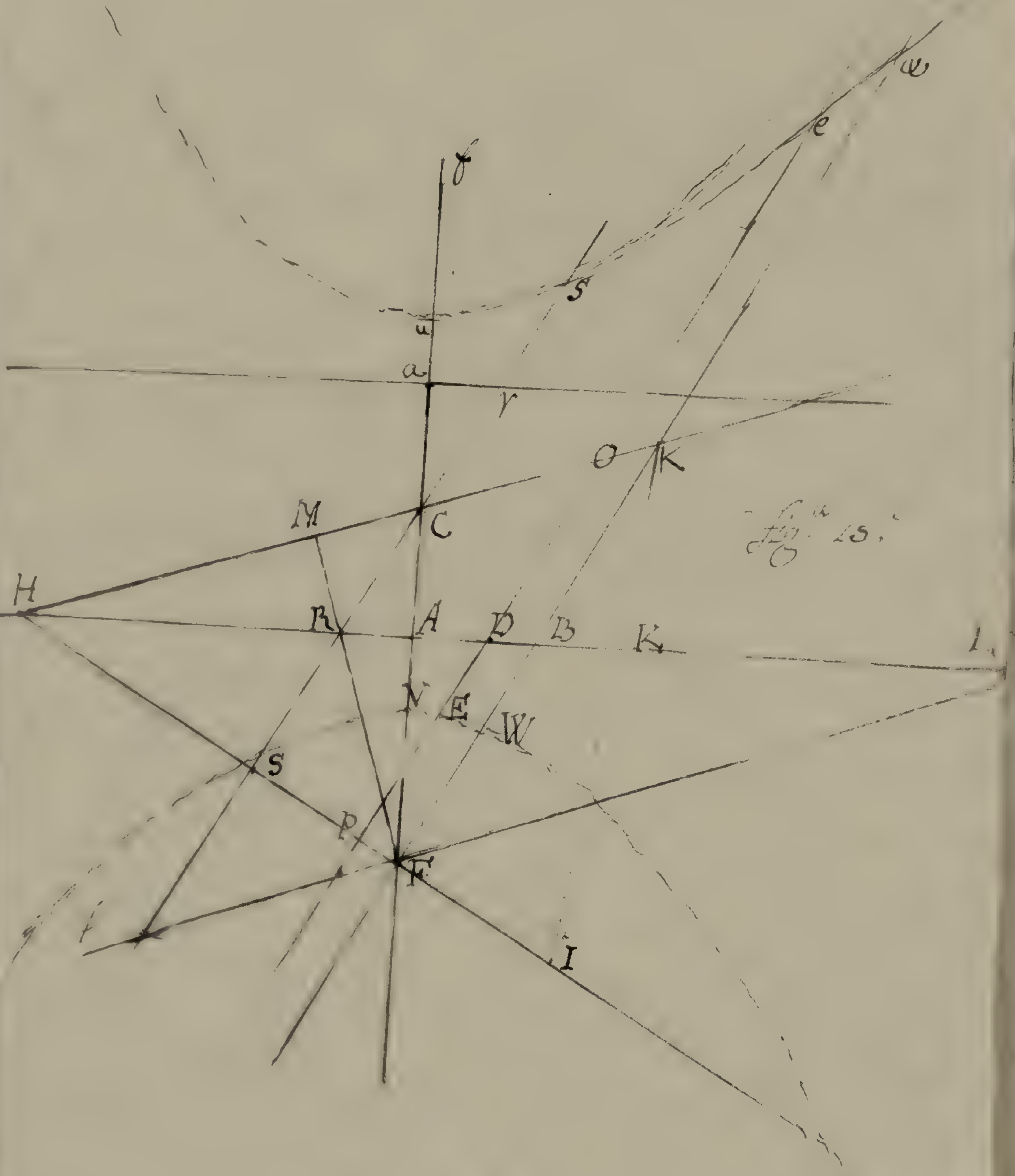


fig. 25.

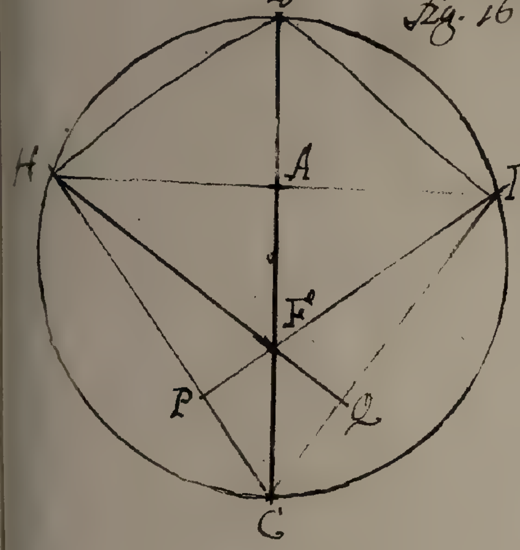


Fig.a 16.a

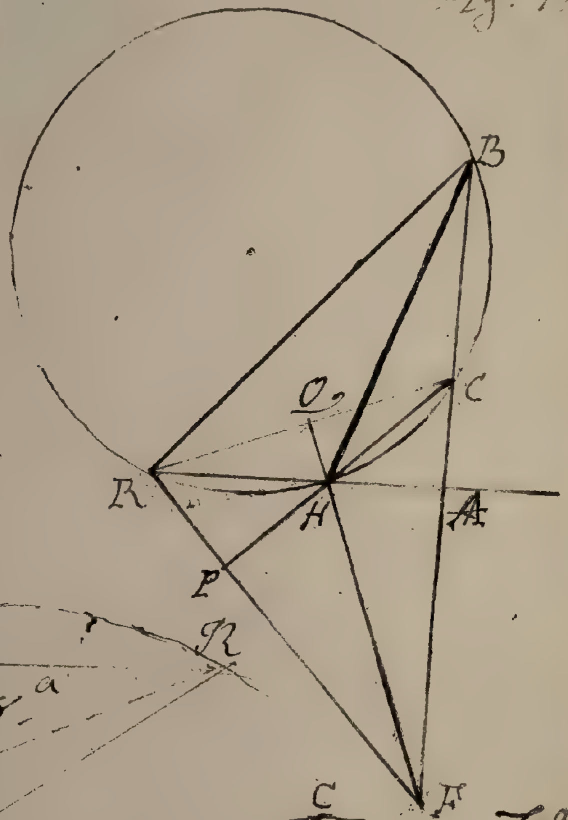


Fig.a 17.

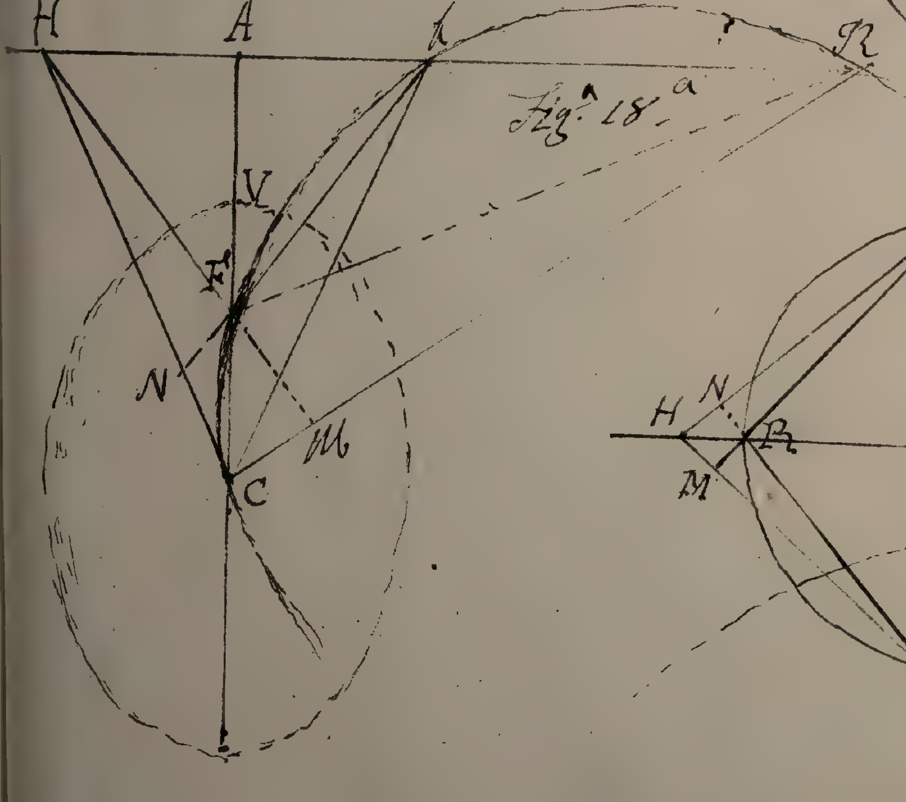


Fig.a 18.a

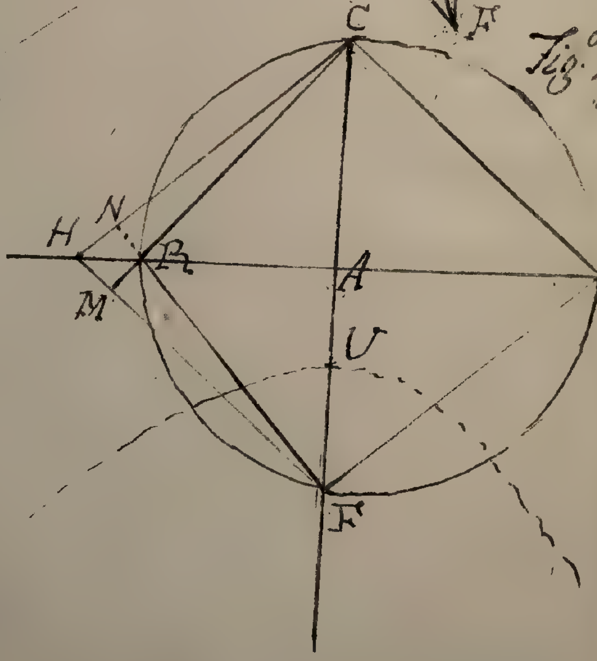


Fig.a 19.

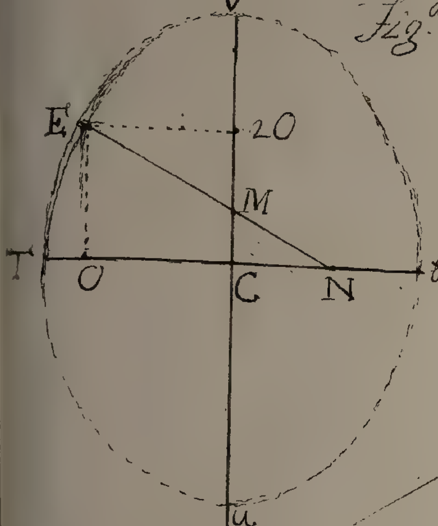


Fig.ª 20.ª

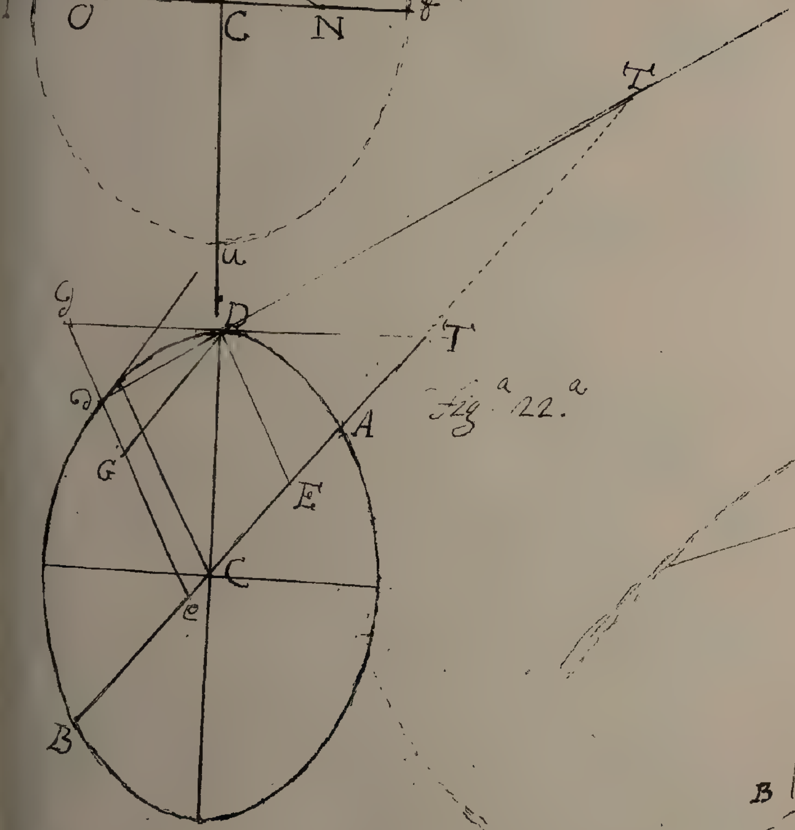


Fig.ª 22.ª

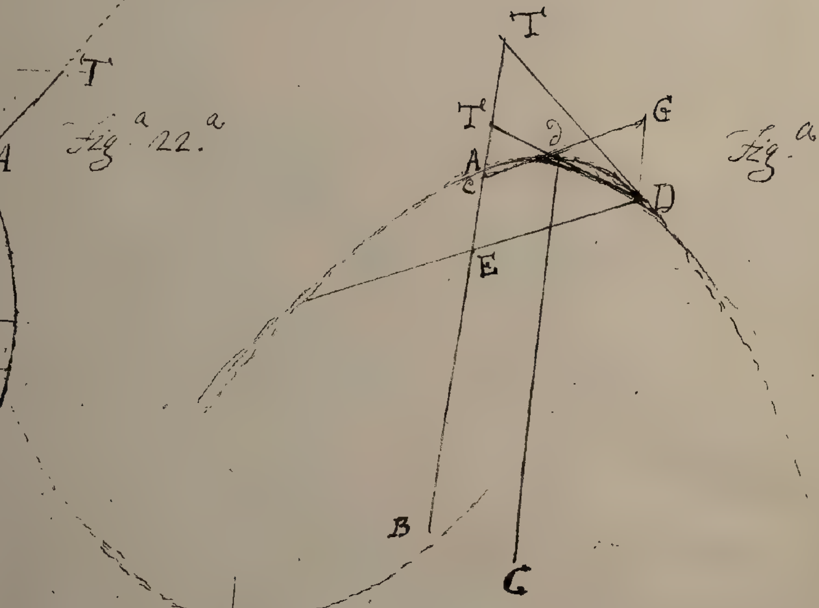


Fig.ª 23.ª

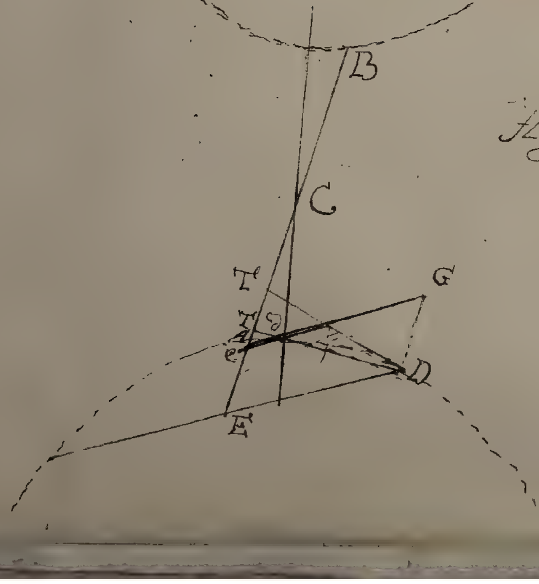


Fig.ª 24.ª

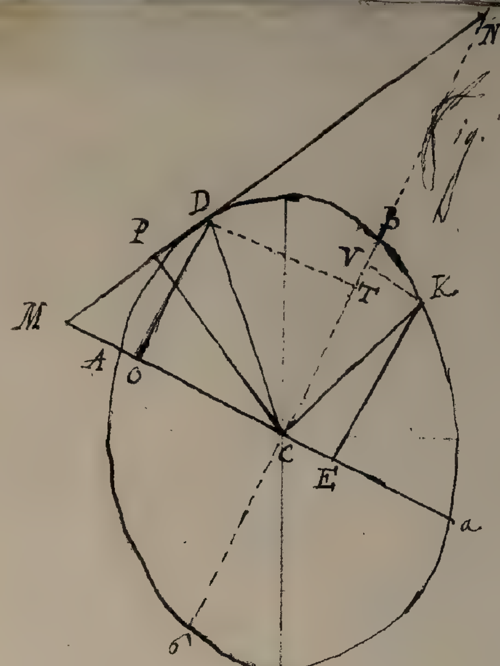


Fig. 25. [redacted] 2

Annotazione. Con questi leggiadri os-
servazione. vedrassi, che se le linee
CA, CB sono diametri qualunque
l'angolo ACB è parimenti indeter-
minato, dunque le citate linee
CP, Cp al corollario 5.° sono ben diver-
se; ma nel caso della presente figura
è forza che coincidino ambedue
nella normale C.P [redacted]
della seguente figura 25 vedrai meglio tu
ciò che ne dice, e la proposizione e
i corollari

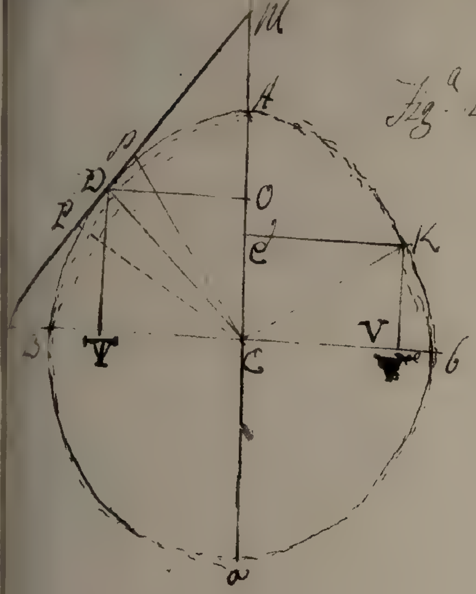


Fig.a 25.a

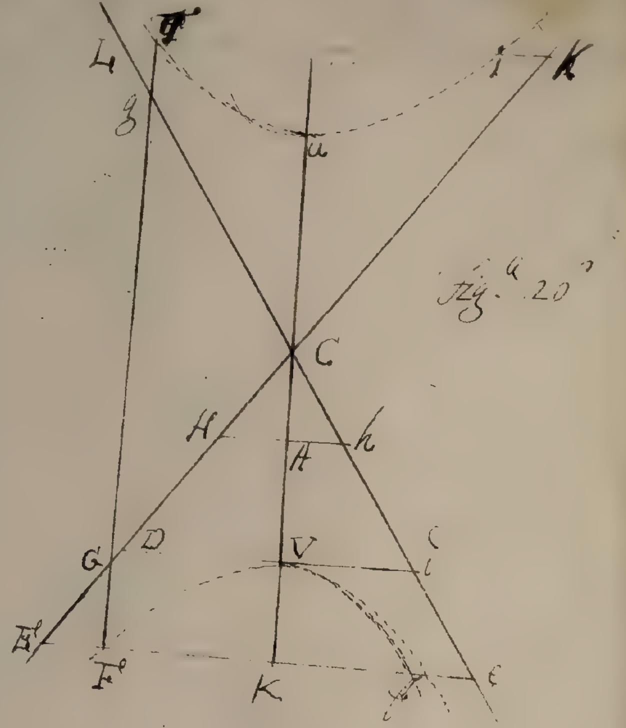


Fig.a 26.a

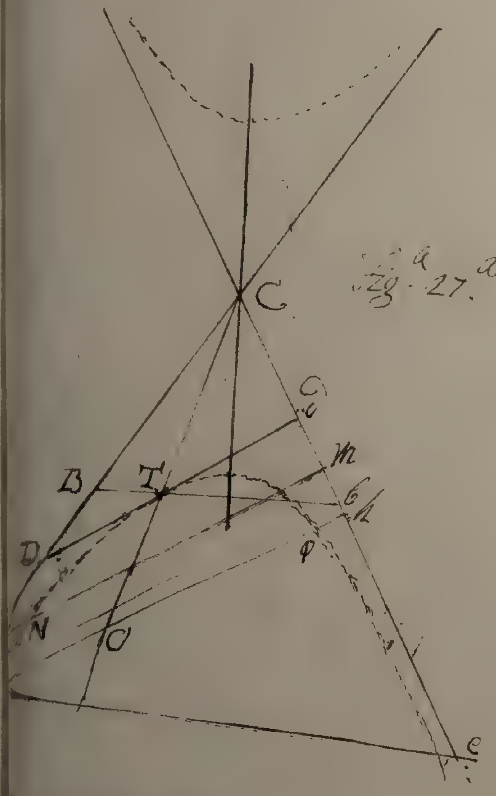


Fig.a 27.a

ricordarsi φ = K

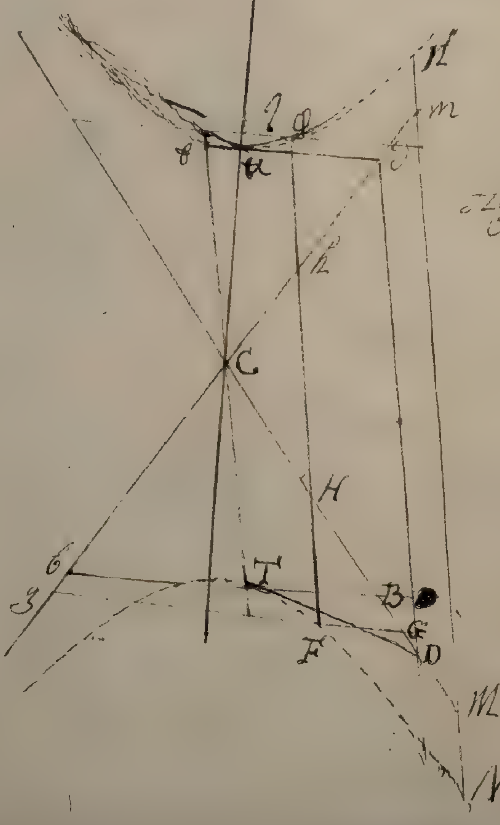


Fig.a [illegible]

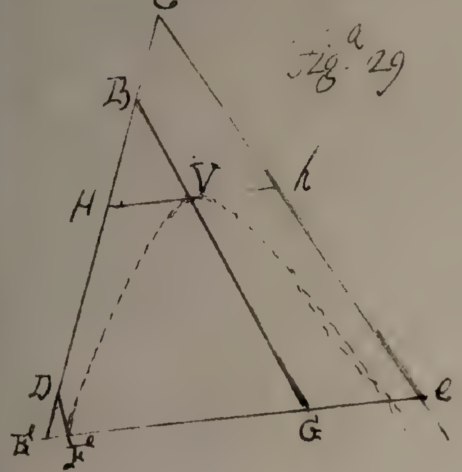


Fig.ª 29

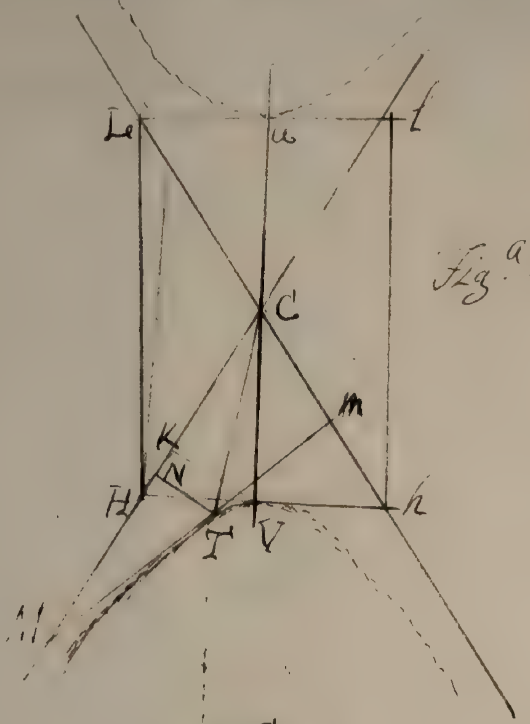


Fig.ª 30.ª

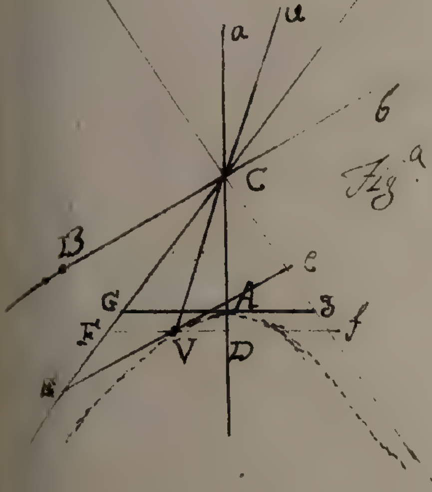


Fig.ª 31.ª

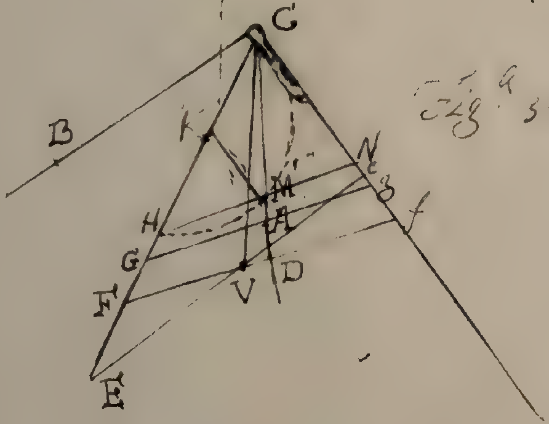


Fig.ª 32.ª

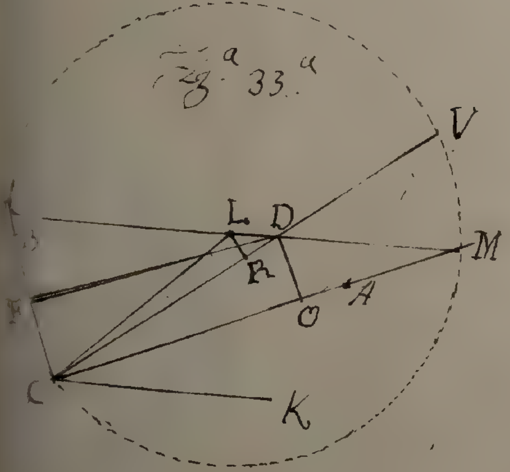


Fig.ª 33.ª

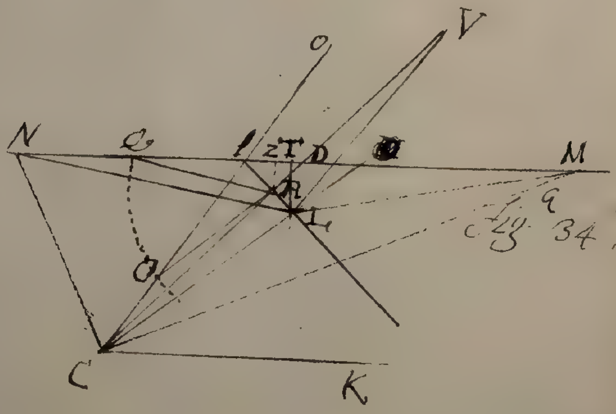
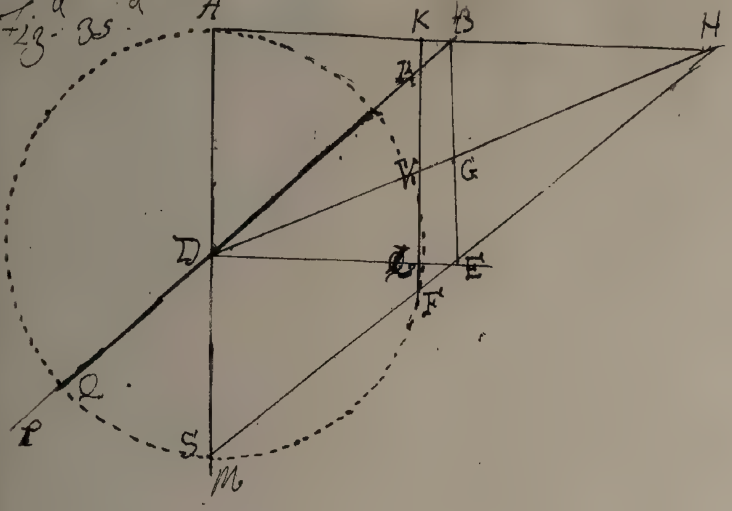


Fig.ª 34.ª

Fig.ª 35.ª



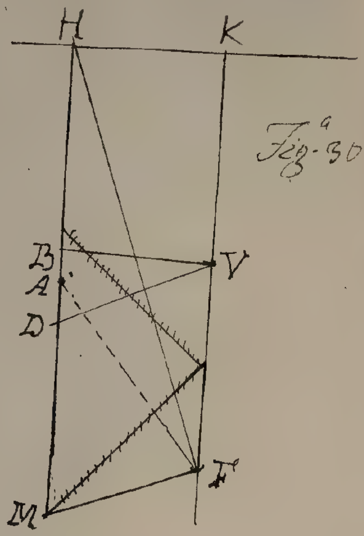


Fig.ª 36.ª

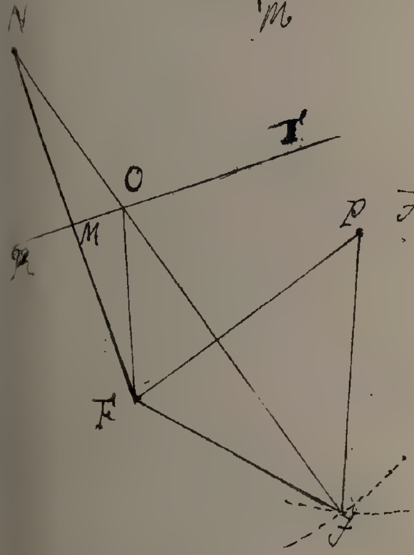


Fig.ª 37.ª

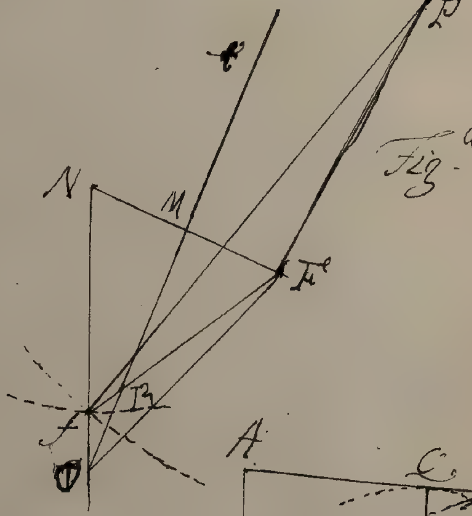


Fig.ª 38.ª

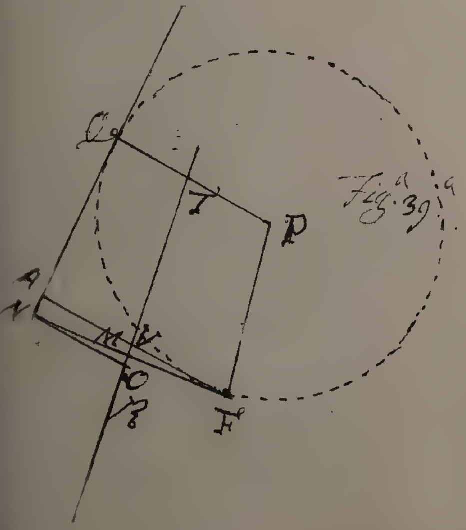


Fig.ª 39.ª

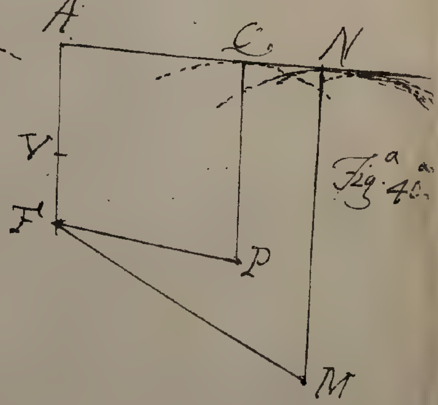


Fig.ª 40.ª

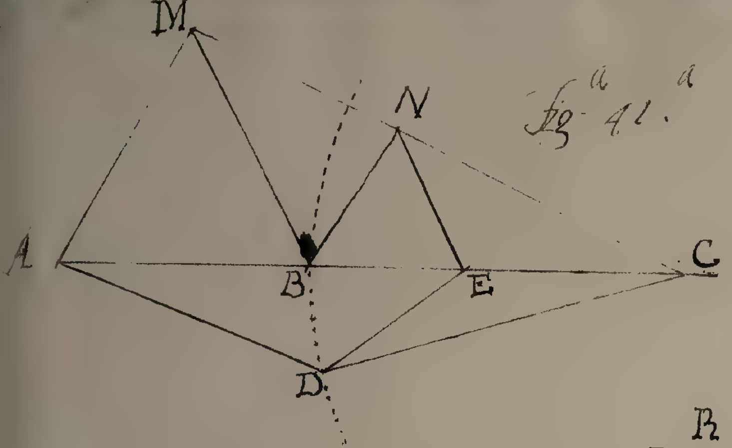


Fig.a 41.a

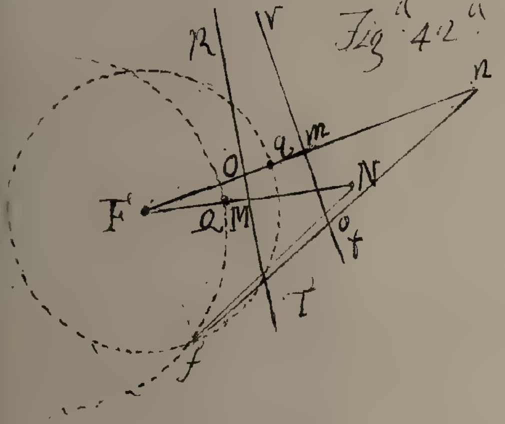


Fig.a 42.a

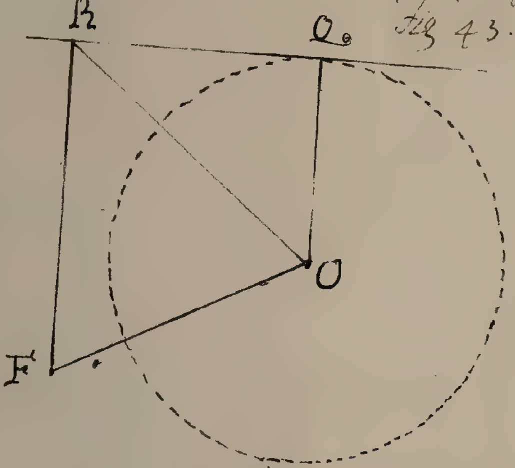


Fig.a 43.a

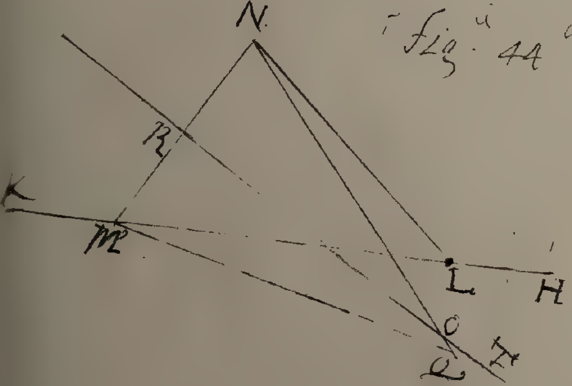
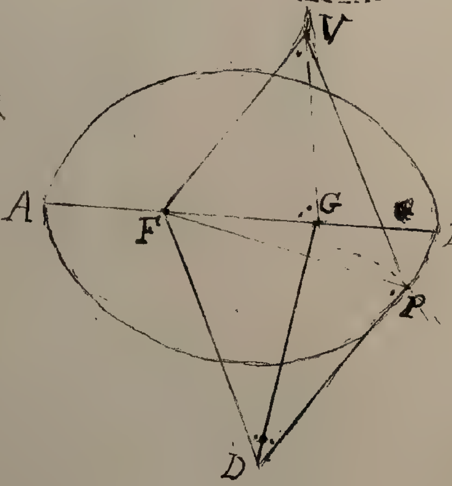


Fig.a 44.a



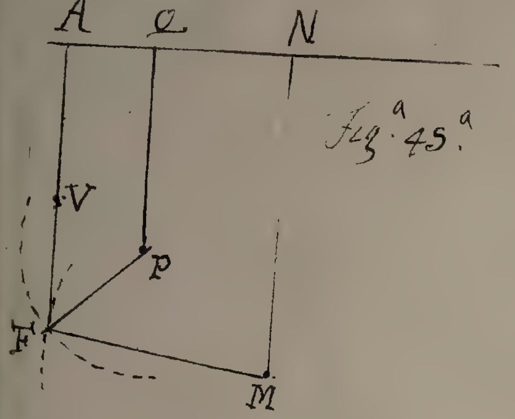


Fig.ª 45.ª

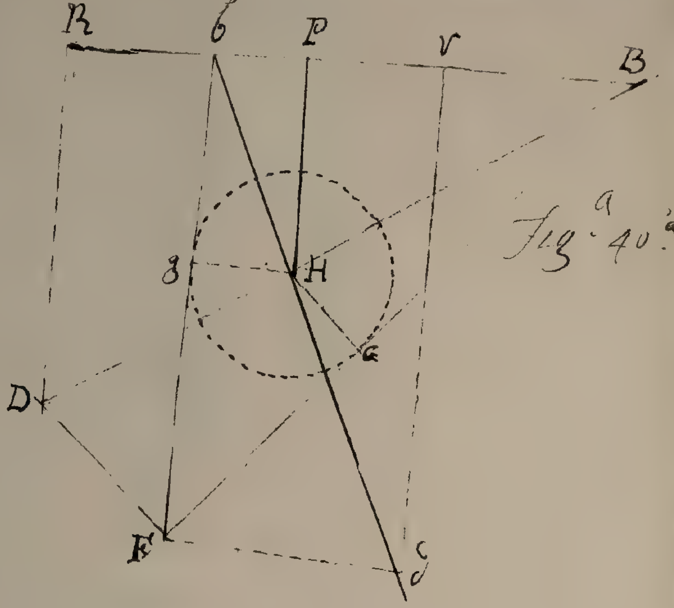


Fig.ª 46.ª

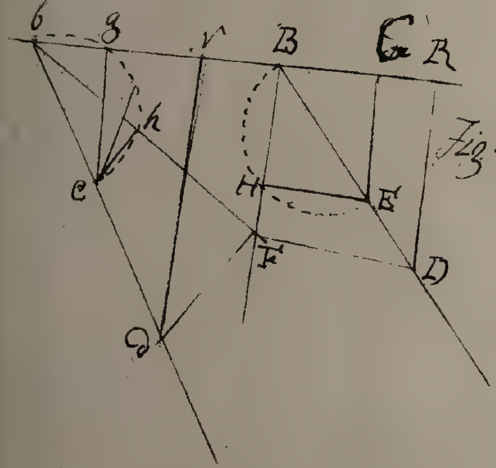


Fig.ª 47.ª

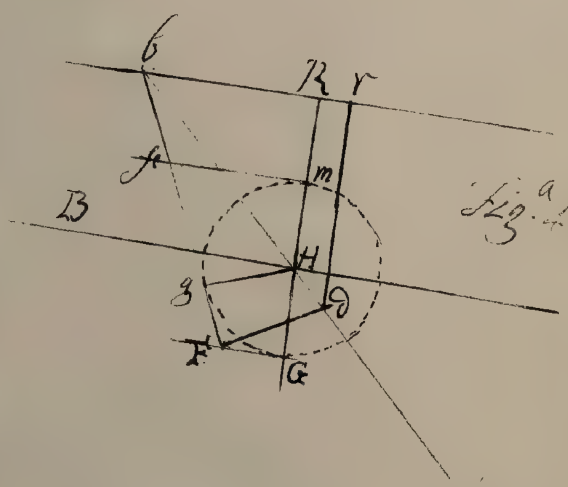


Fig.ª 48.ª

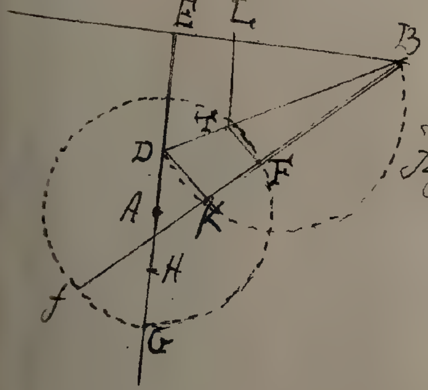


Fig.ª 49.ª

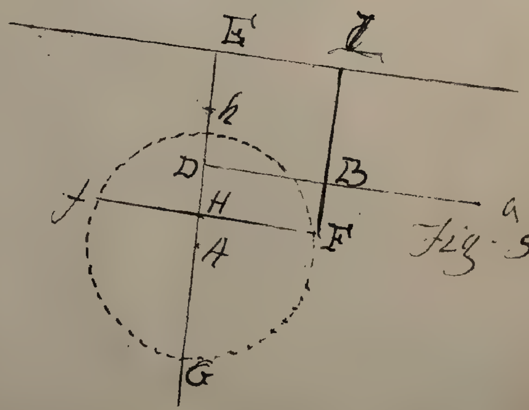


Fig.ª 50.ª

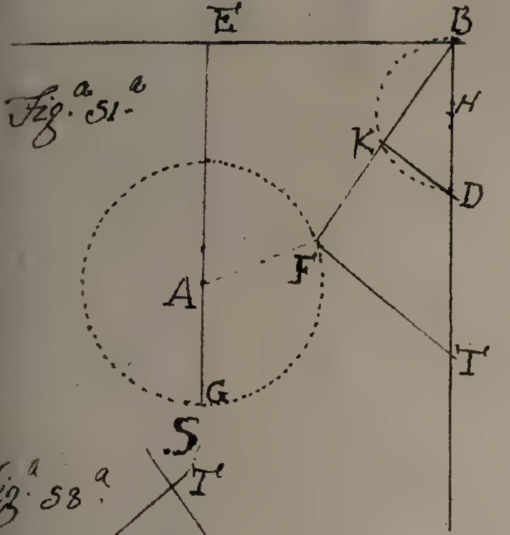


Fig.ª 51.ª

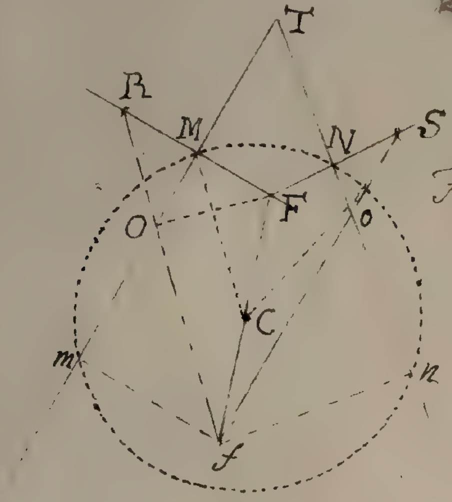


Fig.ª 52.ª

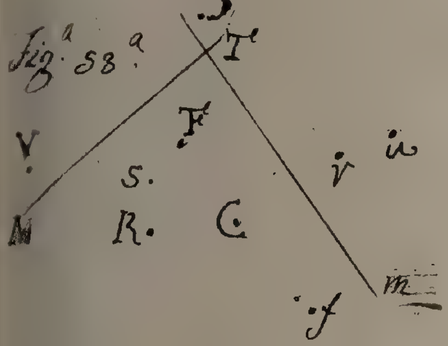


Fig.ª 53.ª

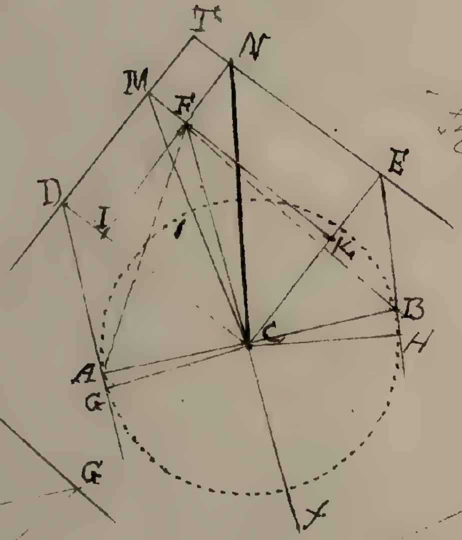


Fig.ª 54.ª

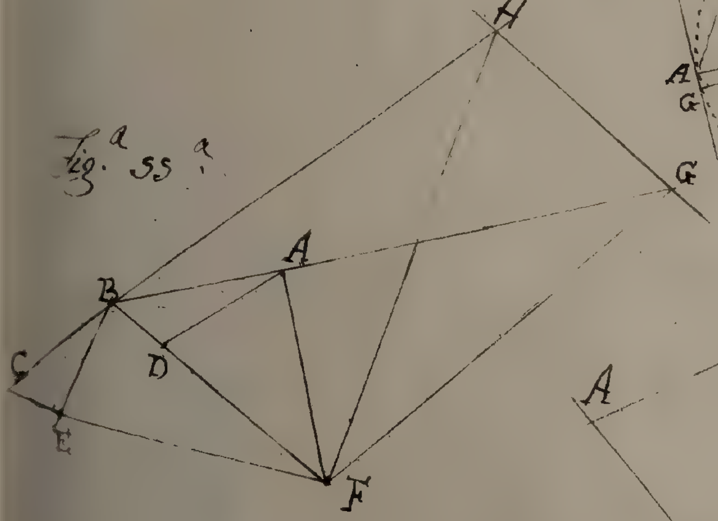


Fig.ª 55.ª

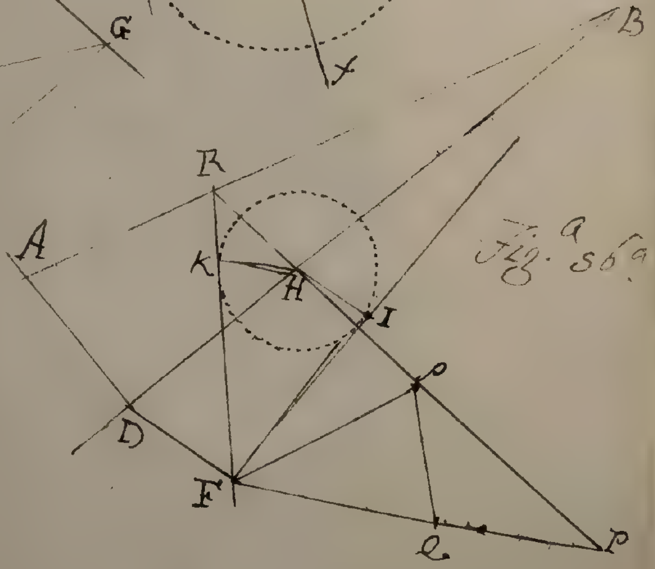


Fig.ª 56.ª

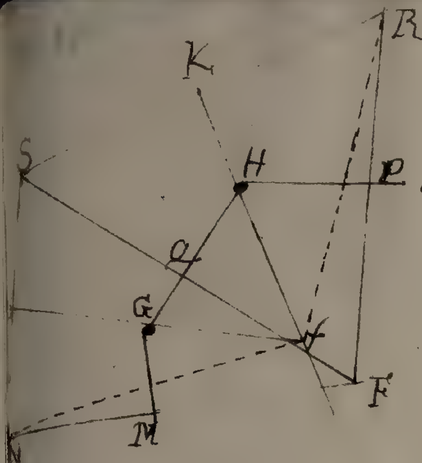


Fig. 57

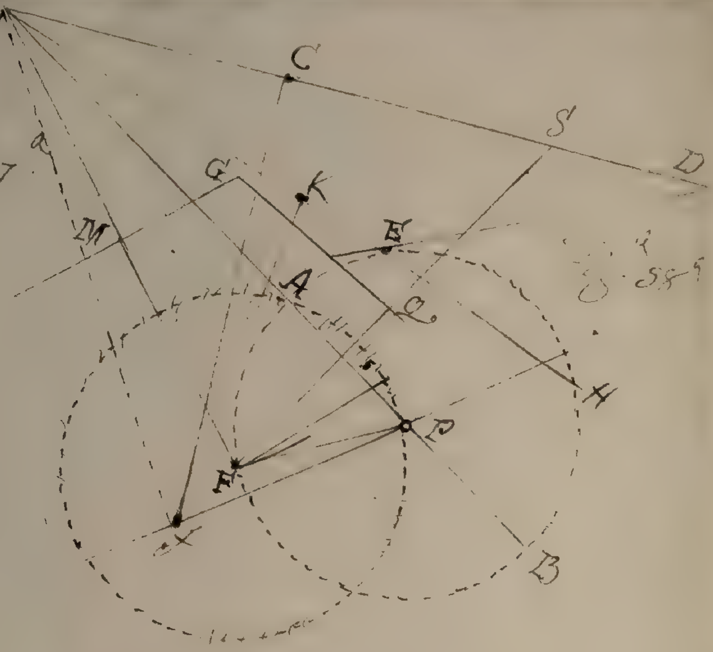


Fig. 58

Fig. 59

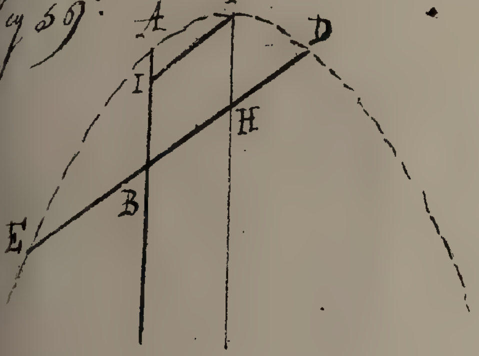


Fig. 60

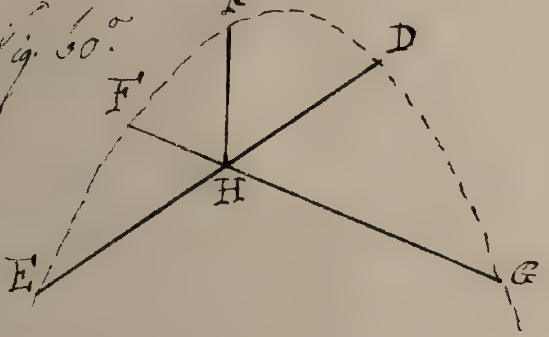


Fig. 61

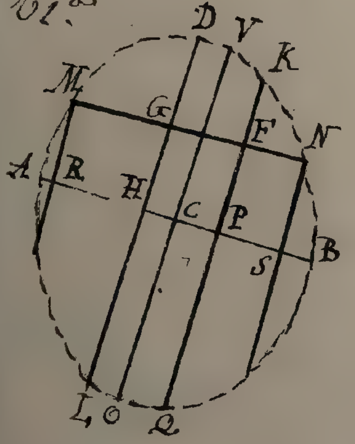
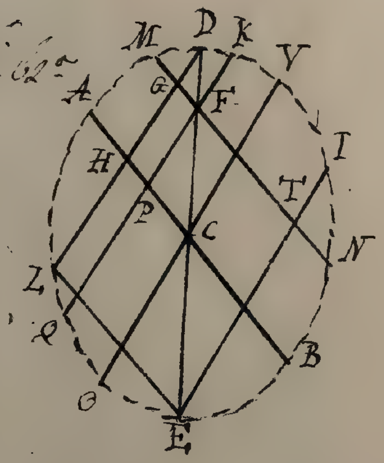


Fig. 62



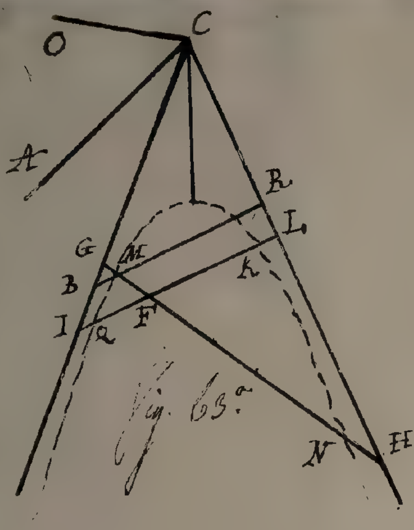


Fig. 63.

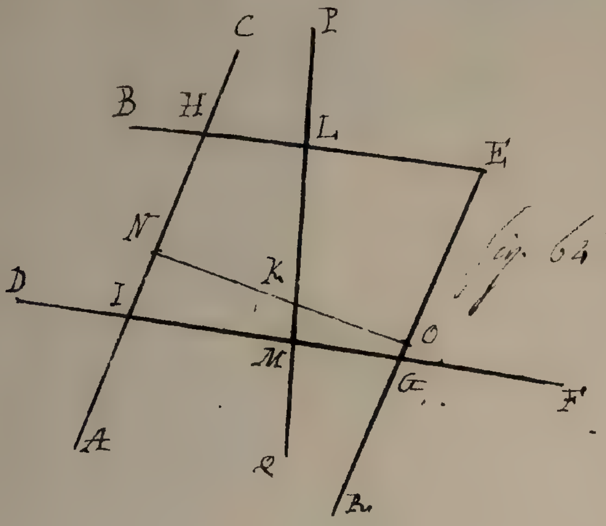


Fig. 64.

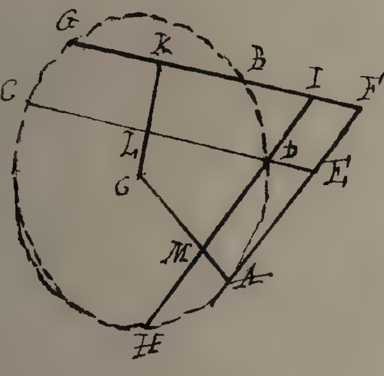


Fig. 65.

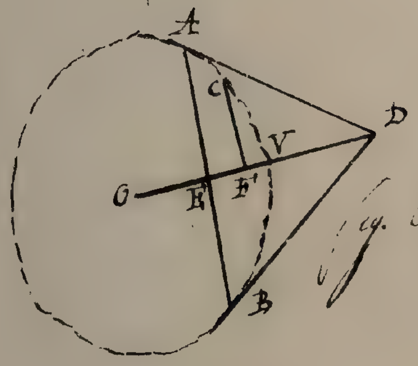
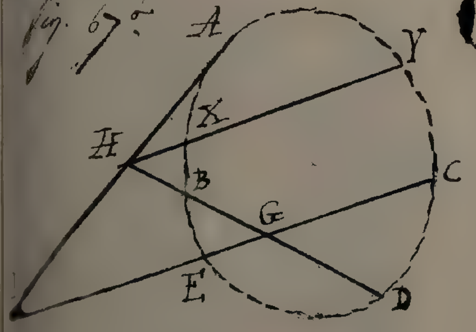


Fig. 66.

Fig. 67.



Luoghi Geometrici

Prop: X

Trovare il centro d'una sezione che passi per 3 punti dati e tocchi in uno di quelli una linea data di posizione

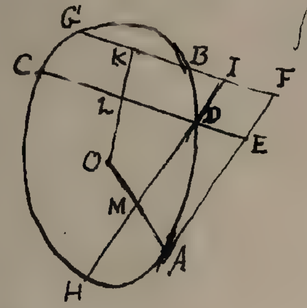


fig. 65.

Prop. XI

Trovare il centro d'una sezione che tocchi due linee date in punti dati e passi per un terzo punto

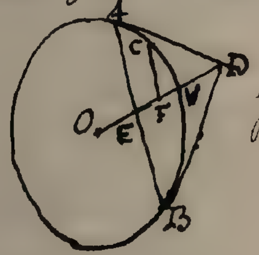


fig. 66.

Prop. XII

Trovare il punto in cui la sezione che passa per quattro punti dati toccherà una linea data.

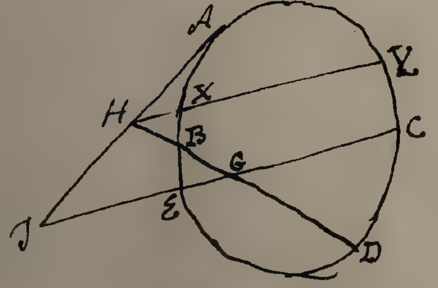
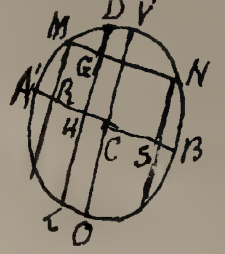
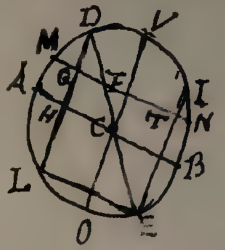


fig. 67.

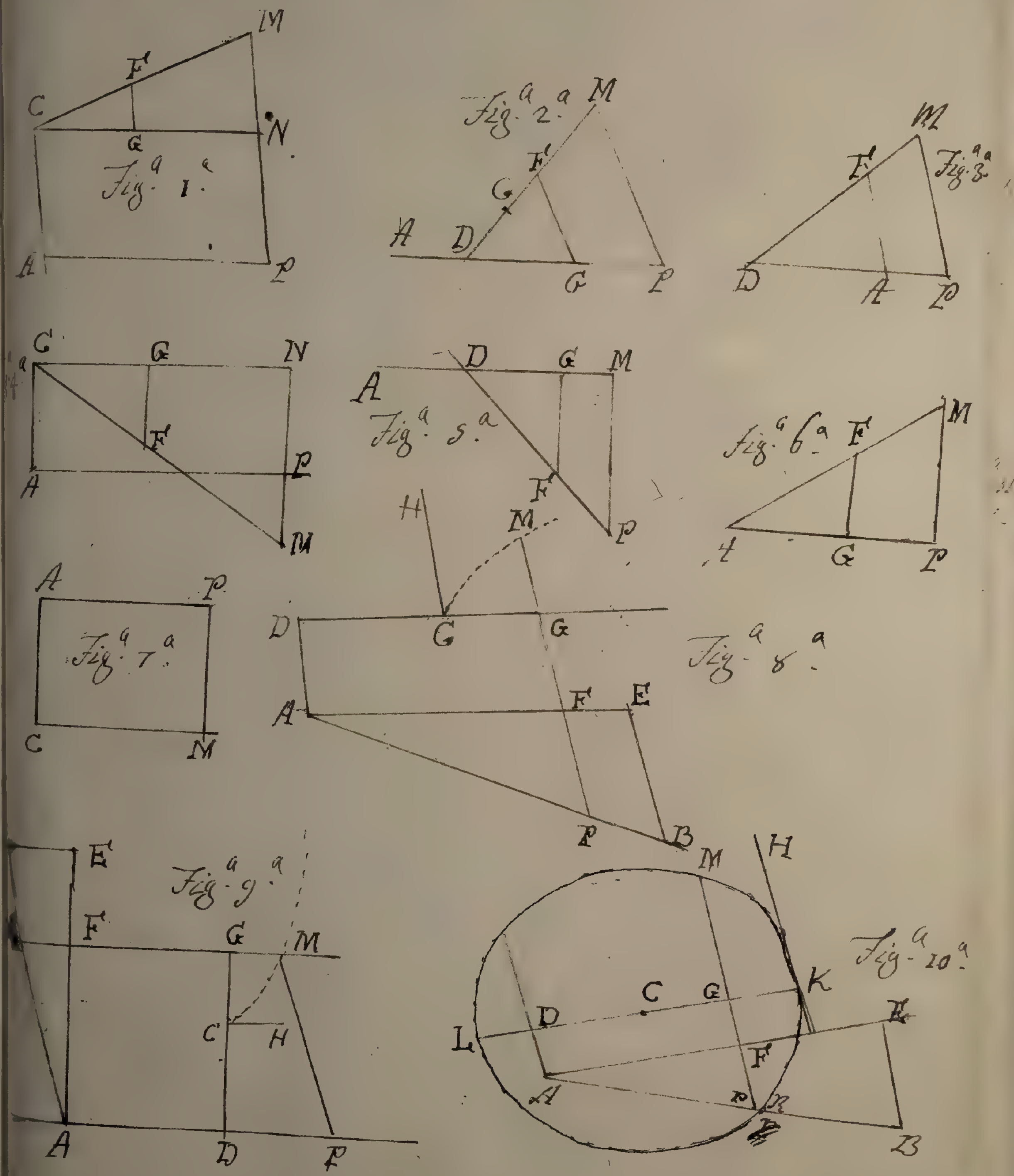
Per la prop. III



Per la prop. IV.



Luoghi Geometrici



D
A
D
A
D

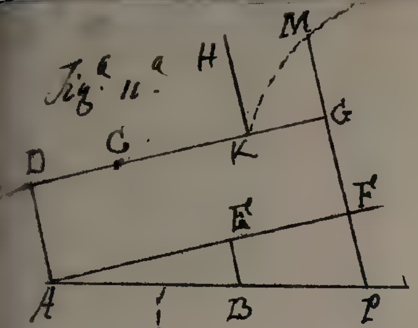


Fig.a 11.a

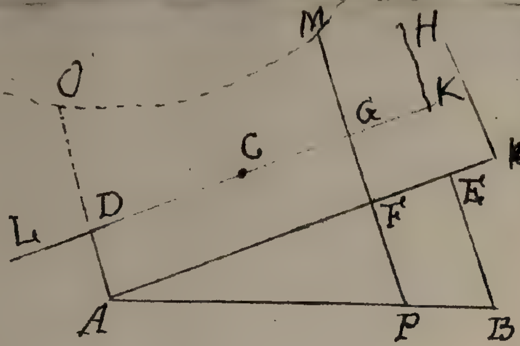
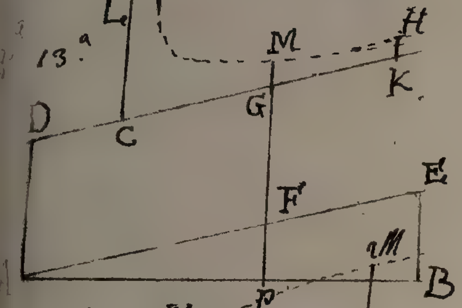


Fig.a 12.a



13.a

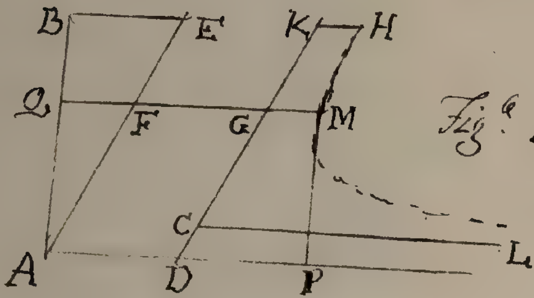


Fig.a 14.a

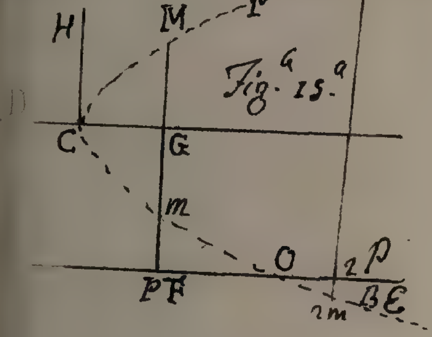


Fig.a 15.a

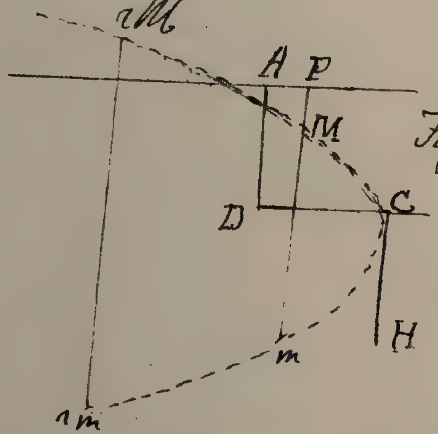


Fig.a 16.a

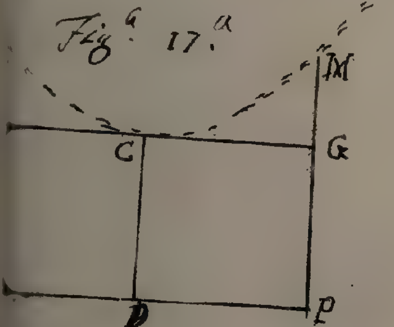


Fig.a 17.a

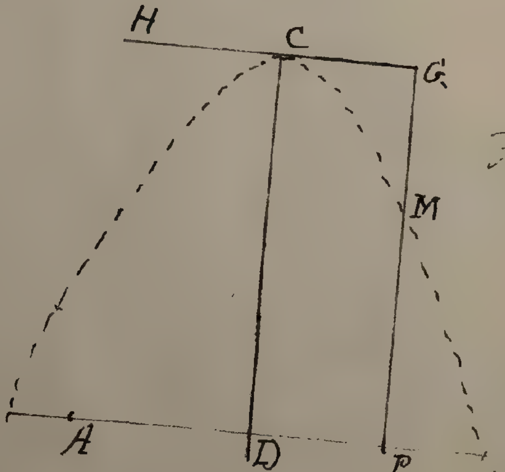


Fig.a 18.a

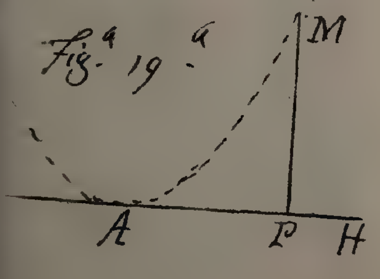


Fig.a 19.a

Luo. Sec

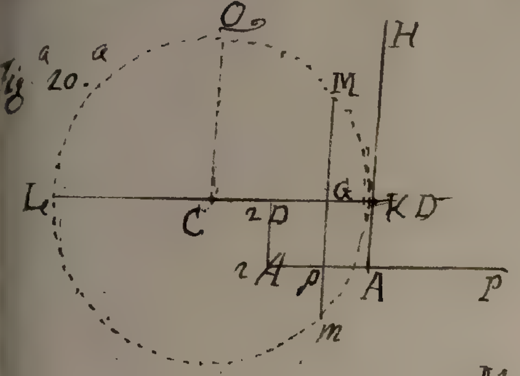


Fig.a 20.a

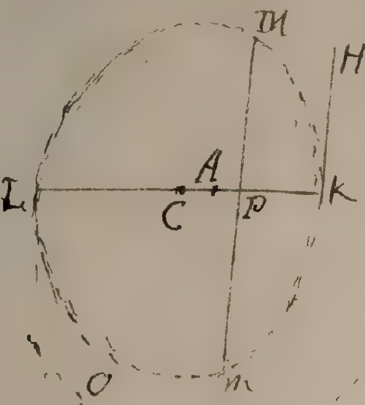


Fig.a 21.a

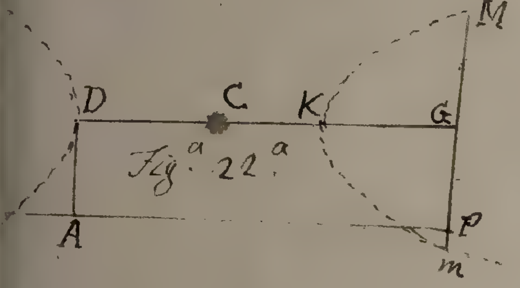


Fig.a 22.a

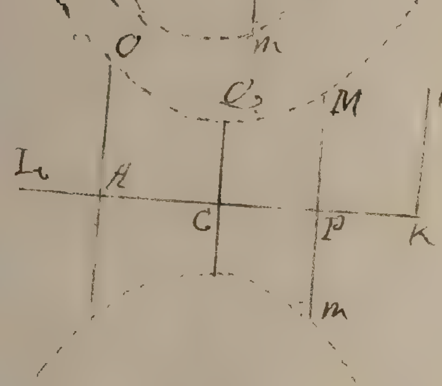


Fig.a 23

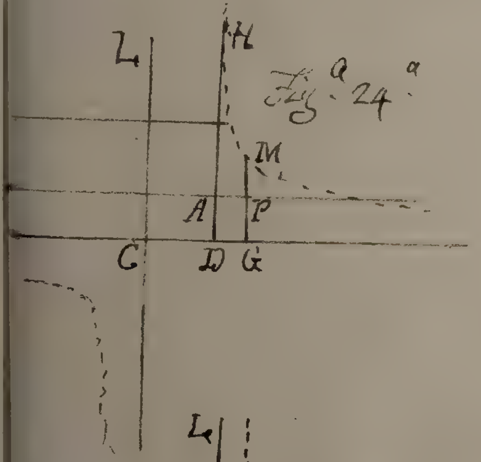


Fig.a 24.a

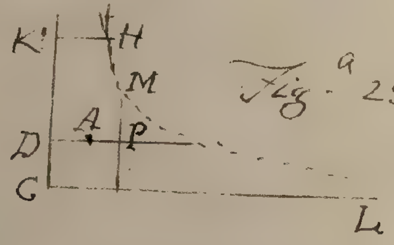


Fig.a 25.a

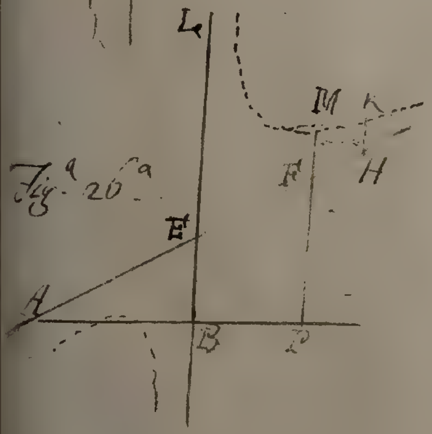


Fig.a 26.a

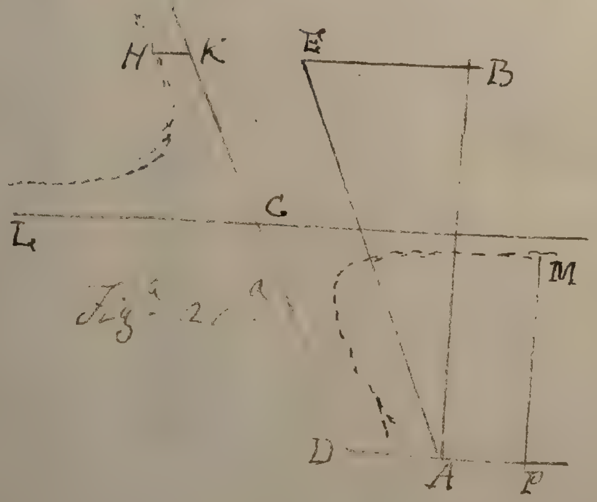


Fig.a 27.a

Luo. Geo.

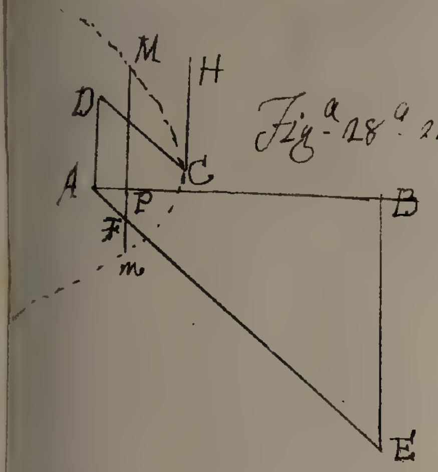


Fig.a 28.a 28

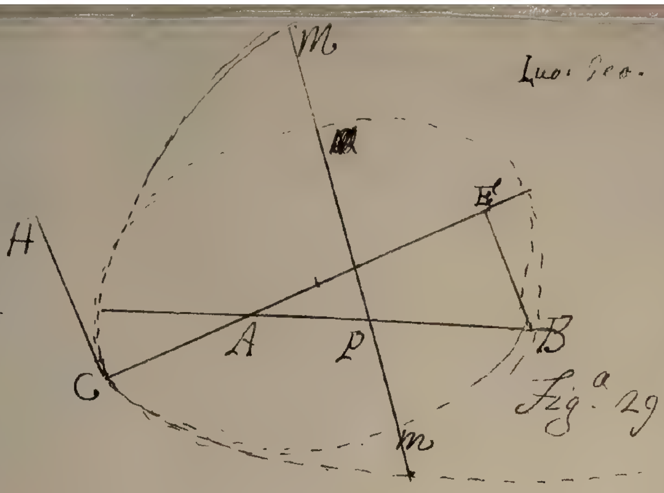


Fig.a 29.a

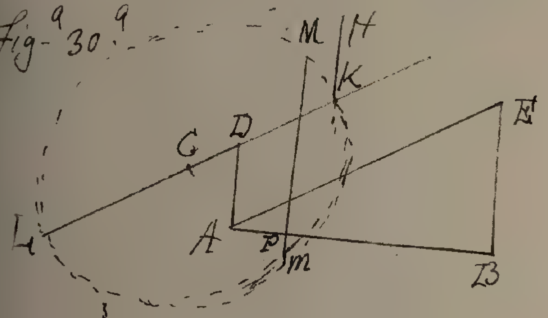


Fig.a 30.a

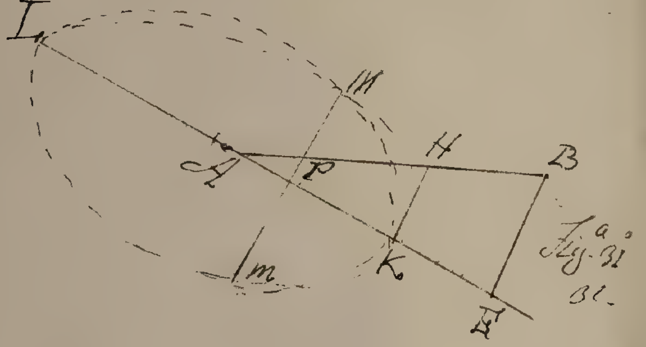


Fig.a 31.a 31.

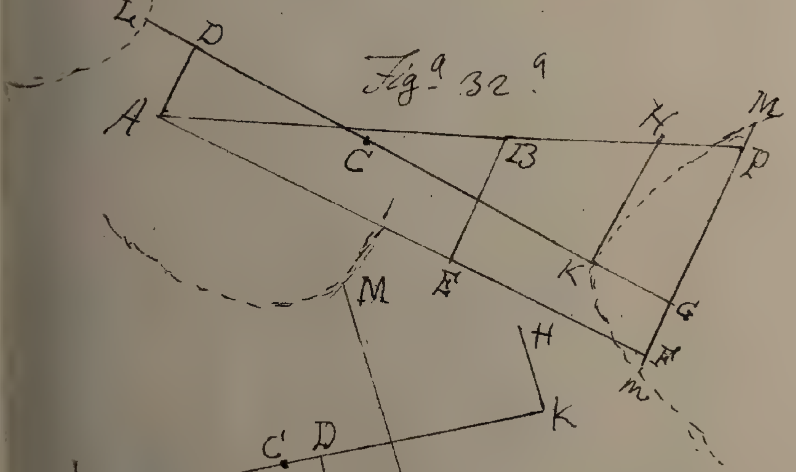


Fig.a 32.a

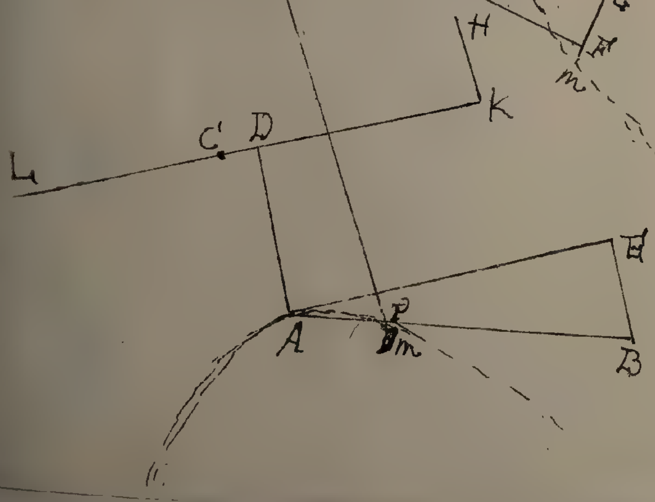


Fig.a 33.a

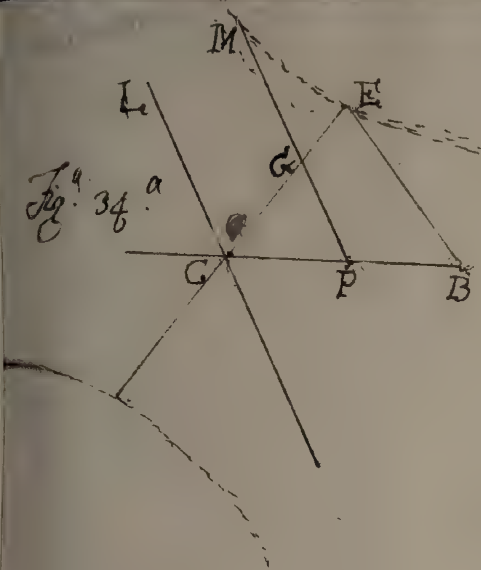


Fig.ª 34.ª

Fig.ª 35.ª

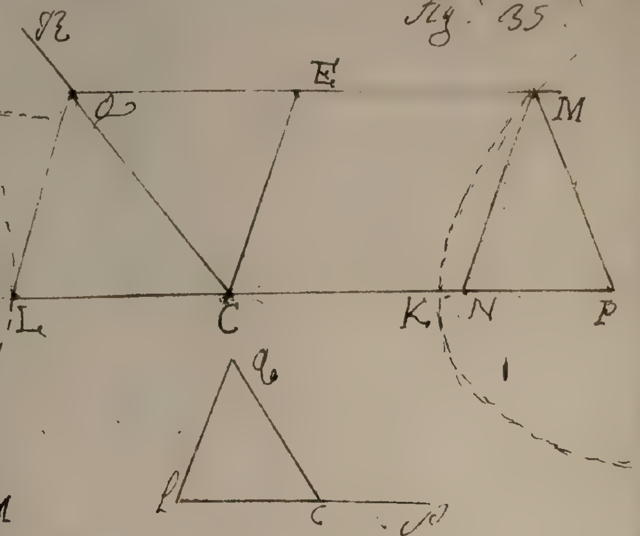


Fig.ª 36.ª

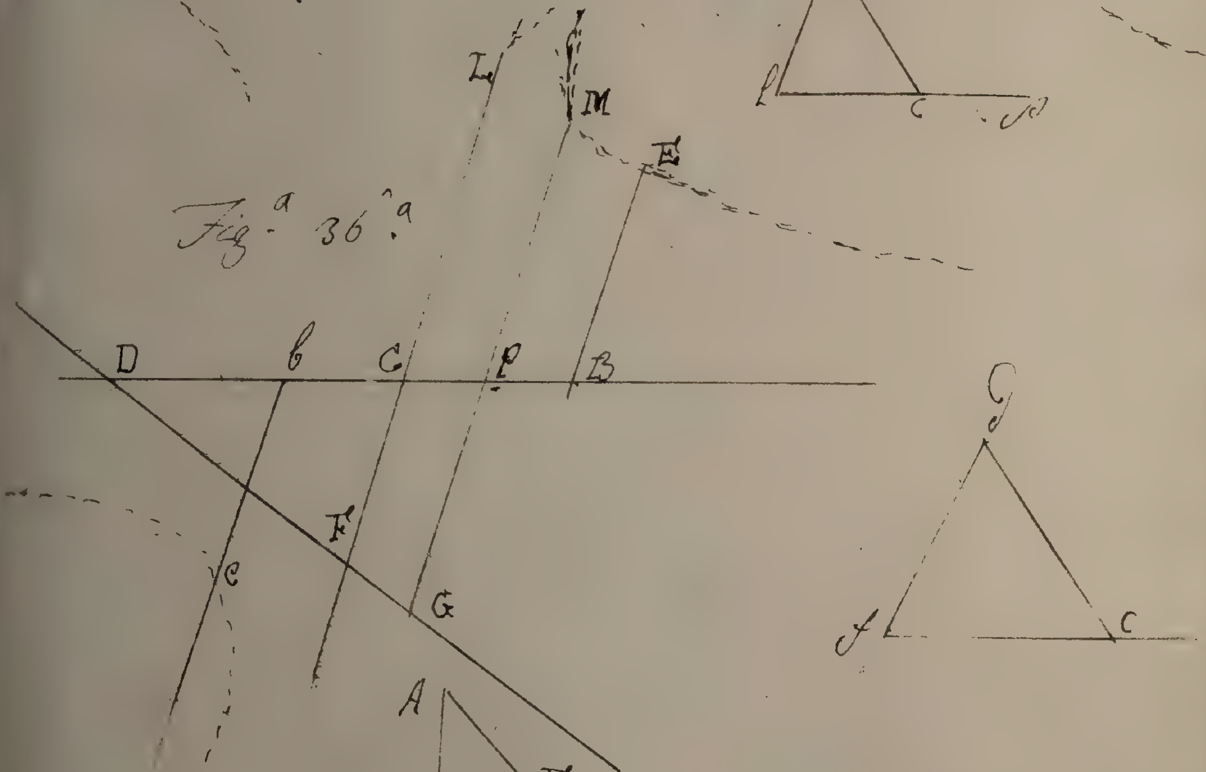
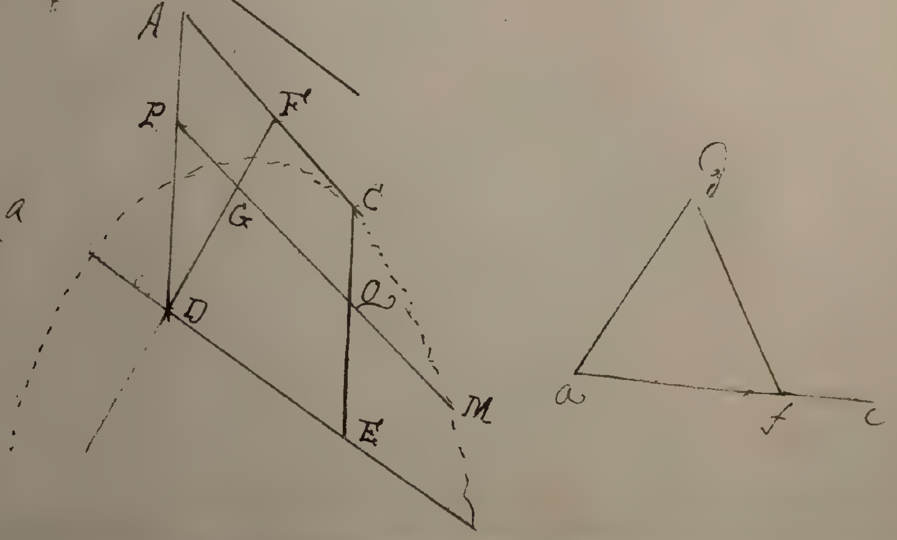


Fig.ª 37.ª



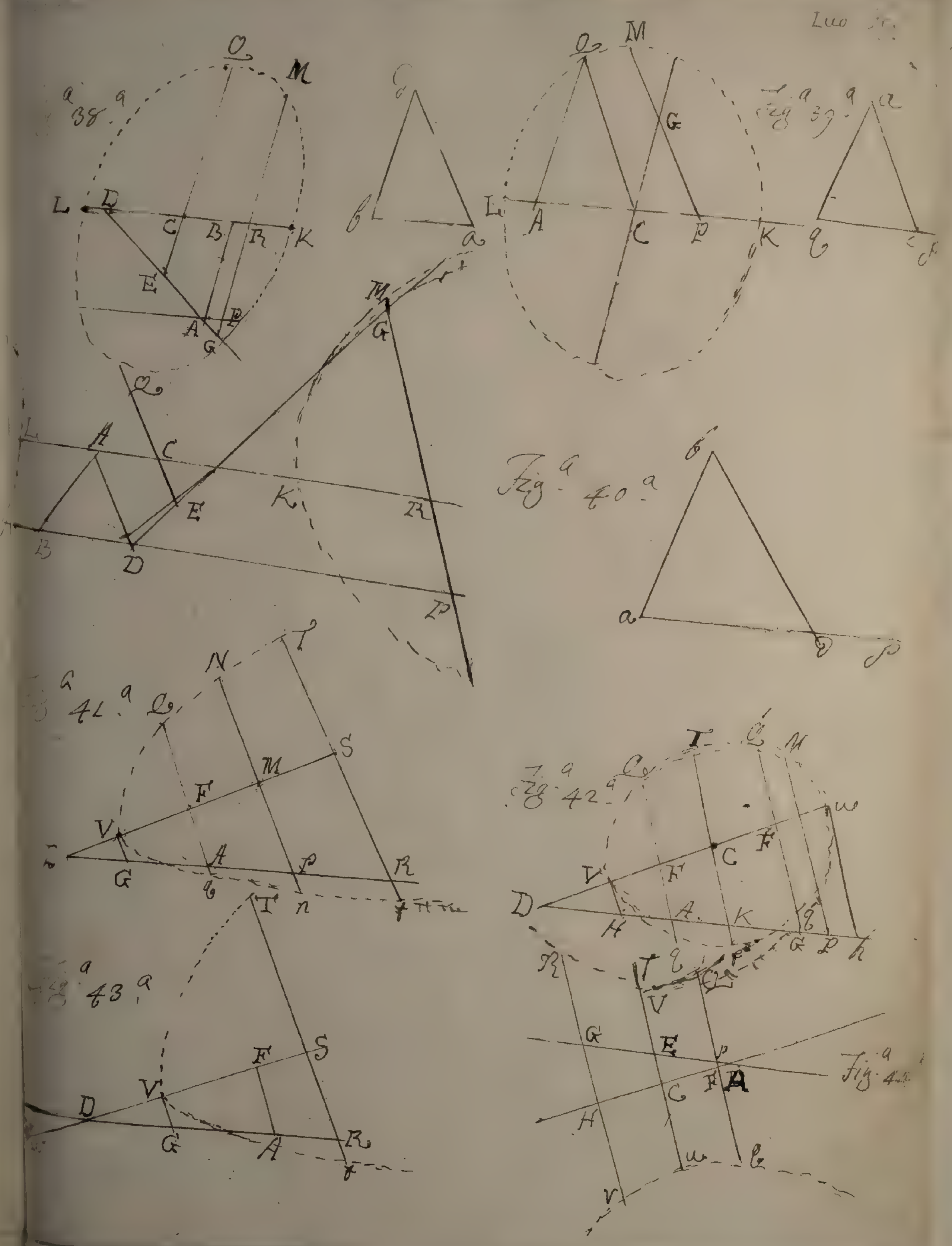


Fig.ª 39.ª
Fig.ª 40.ª
Fig.ª 42.ª

Luo. Ser.

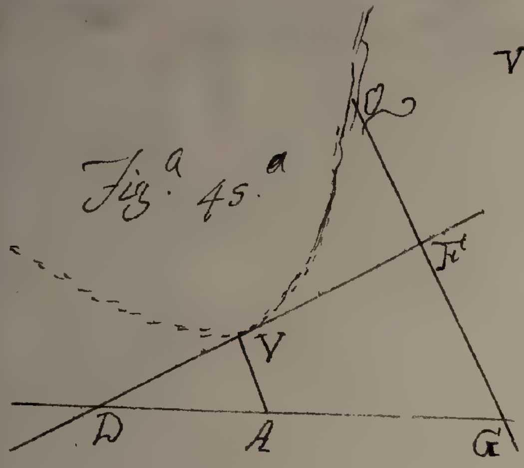


Fig.ª 45.ª

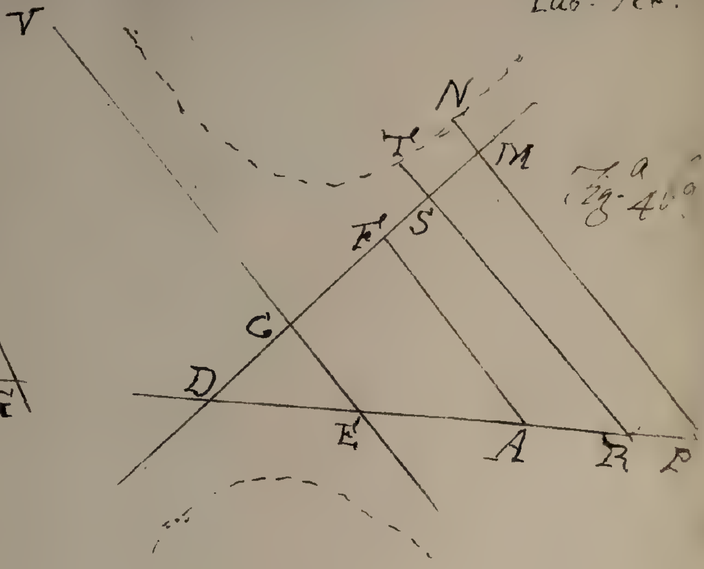
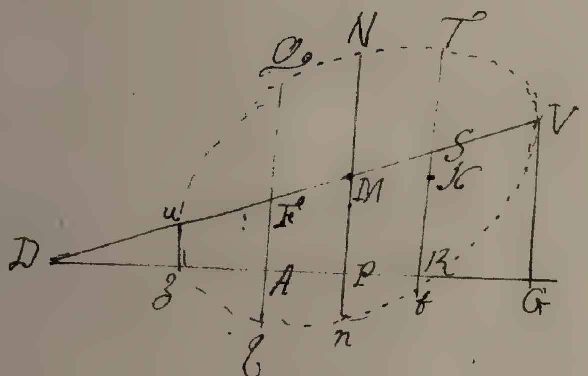


Fig.ª 46.ª

Fig.ª 47.ª



Per la somma dell'Avere che Pietro dell'Eredità Socievi

Gli Eruditiss.mi Socii della Nuova Enciclopedia Italiana devono ai Fratelli Pazzini Carli di Siena per spese dai medesimi fatte delle Copie Prodromo ritornateli indietro dai Corrispond.ti

Dare	Scudi Romani Baj.
Spesi da noi nel porto, e ritorno delle Copie N.° 44= Prodromo ritornateci dal Sig.r D. Michele Stasi di Napoli in R. 74 che col Dazio pagato a Napoli in tutto	3.40
Spesi nel ritorno delle 4= Copie Prodromo ritornateci dalli Sig.ri Caterino Pollani di Pisa	.30
Spesi nel ritorno delle 7= Copie Prodromo ritornateci dai Sig.ri Fratelli Gozzi di Parma fra gabella e porto	.80
Spesi nel ritorno delle 3= Copie Prodromo ritornateci dal Sig. Claudio Philibert di Coppenaguen Gabella, e porto	.45
Spese abbuonate al Sig. Ant.o Lodi di Bologna per ritiro fatto delle 10 Copie Prodromo ritirate dai Sig.ri Callegari di Bologna	.60
Spesi in porto e Gabella delle 4= Copie spedite franche al Sig. Dott. Lodovico Coltellini di Cortona	.90
Spesi in porto, e Gabella pagata delle 11= Copie spedite franche al Sig. Luigi Cremani a Pavia	1.5
Spesi in porto e Gabella da Siena fino a Ponte Lagoscuro per 11= Copie spedite al Sig. Pavagni d'Isero?	1.5
Spesi in porto e Gabella per le 11= Copie spedite franche al Sig. Giuseppe Brambilla di Milano	1.90
Spese abbonate al Sig. Dott. Giuseppe Dannesi? di Palermo per redimere le 9= Copie Prodromo ritirate dal Sig. Bajetti di colà morto fallito 10.95	1.90
Somma le spese fatte da essi	10.95
Legatura di un Prodromo alla Franc. per S. E. il Sig. Card.le Franco Albani fatto d'ordine dell'Ill.mo Sig. Franco Malfatti dopo il Sig.r Consiglio mandatele	1.—
Legatura di altro per il S. Segretario di S. Em.za Sig. ab. Bonani	.40
Somma, e segue il Dare	11.65

355 38 = L'Eruditiss.ma Società della Nuova Enciclopedia Italiana
Deve a i Fr.lli Fratelli Lorenzi Carli di Siena per Denari incassati
di Prodromi venduti per Conto della medma ——— Avere

N.o delle copie		Scudi di Roma
1 =	Dal Nob. Sig. Cav.re Ant. M.a Gori	8
1 =	Dal Revdmo Sig. Decano Giovannelli	
2 =	Dal Sig. Abb. Cavaceppi in moneta Romana	1
1 =	Dal Nob. Sig. Lorenzo Chigi	
2 =	Dall'Eccmo: Sig. Dott. Lodovico Coltellini di Cortona	2.[illegible]
1 =	Dal Revd.mo P. Fr. Ottaviano da S. Teresa Carml.no S.	80
2 =	Dal Nob. Sig. Cav.re Mario Ugurgieri	1.60
1 =	Dal Nob. Sig. Conte Conversati	80
2 =	Dal Sig. D. Domco Valdambrini moneta Romana	[illegible] 69
2 =	Dal Revd.o Sig. D. Gaetano Cassagnari di Bologna meno la sua provvisione del 10 per %	[illegible]
1 =	Dall'Illmo: e Revdmo: Monsig. Gioacchino Radicati Vescovo d'Alghero in Sardegna	
1 =	Dal Sig. Ab. Piccaluga che pagò al Rdmo Sig. Can.co Gio. Biringucci	
2 =	Da S. Eccza il Sig. Principe Chigi di Roma	1.67
3 =	Dai SS.ri Fratelli Faure di Parma abbuonatoli la loro provvisione del 10 per %	2.12
3 =	Dal già Sig. Andrea Rapetti di Palermo morto fallito meno la sua provvisione	2.16
1 =	Dal Sig. Claudio Philibert di Copenaguen meno la sua provvisione	79
N.o = 26		19.5

= Somma, e segue l'Avere retro ——— 19.

= Per la somma del Dare che resta dell'Eredità Società ... 11.65

= E più per Copie N.° 5 = Cina che si spedirono all'Ill.mo Sig.r Alessandro Zorzi, sti Cinque Sig.ri Associati dal Tomo XXV = inclusive al Tomo XXXV = inclusive che sono Tomi N.° 55 = che a L. 3 = il Tomo ascendono a L. 165 = che ... 16.50

E più Allo Scritturale, e Carteggio di Lettere, e Francature ... 4. —

E più Magazzinaggio ... "

39.15